गणित

कक्षा ८

नेपाल सरकार
शिक्षा, विज्ञान तथा प्रविधि मन्त्रालय
पाठ्यक्रम विकास केन्द्र
सानोठिमी, भक्तपुर

प्रकाशक

नेपाल सरकार

शिक्षा, विज्ञान तथा प्रविधि मन्त्रालय

पाठ्यक्रम विकास केन्द्र

सानोठिमी, भक्तपुर

© सर्वाधिकार पाठ्यक्रम विकास केन्द्र

यस पाठ्यपुस्तकसम्बन्धी सम्पूर्ण अधिकार पाठ्यक्रम विकास केन्द्र सानोठिमी, भक्तपुरमा निहित रहेको छ । पाठ्यक्रम विकास केन्द्रको लिखित स्वीकृतिबिना व्यापारिक प्रयोजनका लागि यसको पुरै वा आंशिक भाग हुबहु प्रकाशन गर्न, परिवर्तन गरेर प्रकाशन गर्न, कुनै विद्युतीय साधन वा अन्य प्रविधिबाट रेकर्ड गर्न र प्रतिलिपि निकाल्न पाइने छैन ।

प्रथम संस्करण : वि.सं. २०८०

पाठ्यपुस्तकसम्बन्धी पाठकका कुनै पनि प्रकारका सुझाव भएमा पाठ्यक्रम विकास केन्द्र, समन्वय तथा प्रकाशन शाखामा पठाइदिनुहुन अनुरोध छ । पाठकबाट आउने सुझावलाई केन्द्र हार्दिक स्वागत गर्दछ ।

हाम्रो भनाइ

पाठ्यक्रम शिक्षण सिकाइको मूल आधार हो । पाठ्यपुस्तक विद्यार्थीमा अपेक्षित दक्षता विकास गर्ने एक मुख्य साधन हो । यस पक्षलाई दृष्टिगत गर्दै पाठ्यक्रम विकास केन्द्रले विद्यालय शिक्षालाई व्यावहारिक, समयसापेक्ष र गुणस्तरीय बनाउने उद्देश्यले पाठ्यक्रम तथा पाठ्यपुस्तकको विकास तथा परिमार्जन कार्यलाई निरन्तरता दिँदै आएको छ । आधारभूत शिक्षाले बालबालिकामा आधारभूत साक्षरता, गणितीय अवधारणा र सिप एवम् जीवनोपयोगी सिपको विकासका साथै व्यक्तिगत स्वास्थ्य तथा सरसफाइसम्बन्धी बानीको विकास गर्ने अवसर प्रदान गर्नुपर्छ । आधारभूत शिक्षाका माध्यमबाट बालबालिकाहरूले प्राकृतिक तथा सामाजिक वातावरणप्रति सचेत भई अनुशासन, सदाचार र स्वावलम्बन जस्ता सामाजिक एवम् चारित्रिक गुणको विकास गर्नुपर्छ। यसले विज्ञान, वातावरण र सूचना प्रविधिसम्बन्धी आधारभूत ज्ञानको विकास गराई कला तथा सौन्दर्यप्रति अभिरुचि जगाउनुपर्छ। शारीरिक तन्दुरुस्ती, स्वास्थ्यकर बानी एवम् सिर्जनात्मकताको विकास तथा जातजाति, धर्म, भाषा, संस्कृति, क्षेत्रप्रति सम्मान र समभावको विकास पनि आधारभूत शिक्षाका अपेक्षित पक्ष हुन् । देशप्रेम, राष्ट्रिय एकता, लोकतान्त्रिक मूल्यमान्यता तथा संस्कार सिकी व्यावहारिक जीवनमा प्रयोग गर्नु, सामाजिक गुणको विकास तथा नागरिक कर्तव्यप्रति सजगता अपनाउनु र दैनिक जीवनमा आइपर्ने व्यावहारिक समस्याहरूको पहिचान गरी समाधानका उपायको खोजी गर्नु पनि आधारभूत तहको शिक्षाका आवश्यक पक्ष हुन् । यस पक्षलाई दृष्टिगत गरी विद्यालय शिक्षाको राष्ट्रिय पाठ्यक्रम प्रारूप, २०७६ अनुसार विकास गरिएको आधारभूत शिक्षा (कक्षा ८) को गणित विषयको पाठ्यक्रमअनुरूप परीक्षणबाट प्राप्त सुझावसमेत समायोजन गरी यो पाठ्यपुस्तक विकास गरिएको हो ।

यस पाठ्यपुस्तकको लेखन टिकाराम पोखरेल, राजुकान्त आचार्य, सोमकुमार श्रेष्ठ, रीतु श्रेष्ठ, रामचन्द्र ढकालबाट भएको हो । पाठ्यपुस्तकलाई यस रूपमा ल्याउने कार्यमा केन्द्रका महानिर्देशक श्री वैकुण्ठप्रसाद अर्याल, प्रा डा. हरिप्रसाद उपाध्याय, श्री नविन पौडेल, श्रीज्ञानेन्द्र बन, श्री अनुपमा शर्मा, श्री सत्यनारायण महर्जन, श्री शक्तिप्रसाद आचार्य र श्री प्रमिला बखतीलगायतका महानुभावको विशेष योगदान रहेको छ । यसको भाषा सम्पादन श्री चिनाकुमारी निरौलाबाट भएको हो । यस पुस्तकको टाइप तथा लेआउट डिजाइन श्री जयराम कुइकेल र श्री रश्मी खागीबाट भएको हो । यस पुस्तकको विकास कार्यमा संलग्न सबैप्रति पाठ्यक्रम विकास केन्द्र धन्यवाद प्रकट गर्छ ।

पाठ्यपुस्तकलाई शिक्षण सिकाइको महत्त्वपूर्ण साधनका रूपमा लिइन्छ । यसबाट विद्यार्थीले पाठ्यक्रमद्वारा लक्षित सक्षमता हासिल गर्न मदत पुग्ने अपेक्षा गरिएको छ । यस पाठ्यपुस्तकलाई सकेसम्म क्रियाकलापमुखी, अनुभवकेन्द्रित, उद्देश्यमूलक र रुचिकर बनाउने प्रयत्न गरिएको छ । सिकाइ र विद्यार्थीको जीवन्त अनुभवबिच तादात्म्य कायम गर्दै यसको सहज प्रयोग गर्न शिक्षकले सहजकर्ता, उत्प्रेरक, प्रवर्धक र खोजकर्ताका रूपमा भूमिकाको अपेक्षा गरिएको छ । पाठ्यपुस्तकलाई अझै परिष्कृत पार्नका लागि शिक्षक, विद्यार्थी, अभिभावक, बुद्धिजीवी एवम् सम्पूर्ण पाठकको समेत महत्त्वपूर्ण भूमिका रहने हुँदा सम्बद्ध सबैको रचनात्मक सुझावका लागि पाठ्यक्रम विकास केन्द्र हार्दिक अनुरोध गर्छ ।

नेपाल सरकार
शिक्षा, विज्ञान तथा प्रविधि मन्त्रालय
पाठ्यक्रम विकास केन्द्र

वि. सं. २०८०

विषयसूची

क्र.स.	शीर्षक	पृष्ठसङ्ख्या
१	समूह	१
२	पूर्णसङ्ख्या	१३
३	आनुपातिक र अनानुपातिक सङ्ख्या	२८
४	अनुपात र समानुपात	४५
५	नाफा र नोक्सान	५६
६	ऐकिक नियम	६५
७	साधारण ब्याज	७९
८	क्षेत्रफल र आयतन	९१
९	घाताङ्क	१२३
१०	बीजीय अभिव्यञ्जक	१३०
११	बीजीय भिन्न	१५८
१२	समिकरण, असमानता र ग्राफ	१७७
१३	रेखा र कोणहरु	१९१
१४	समतलीय आकृति	२०४
१५	अनुरुप तथा समरुप आकृति	२४१
१६	ठोस वस्तुहरु	२६०
१७	निर्देशाङ्क	२६८
१८	सममिति र टेसेलेसन	२७४
१९	स्थानान्तरण	२७९
२०	दिशा स्थिती र स्केल ड्रोइङ्ग	२९०
२१	तथ्याङ्क शास्त्र	३०६

पाठ 1

समूह
(Set)

1.0 पुनरवलोकन (Review)

यदि सर्वव्यापक समूह (U) = {10 सम्मका गन्तीका सङ्ख्याहरू} भए तलका समूह सूचीकरण विधिबाट निर्माण गर्नुहोस् र दिइएका प्रश्नमा छलफल गर्नुहोस् ।

(क) A = {रूढ सङ्ख्याहरू}

(ख) B = {बिजोर सङ्ख्याहरू}

(ग) C = {3 का अपवर्त्यहरू}

(घ) D = {8 का गुणनखण्डहरू}

(ङ) E = {संयुक्त सङ्ख्याहरू}

के समूह A, B, C, D, E का सदस्यहरू सर्वव्यापक U का पनि सदस्यहरू हुन् ?

समूह A, B, C, D, E लाई समूह U को कस्तो समूह भनिन्छ ?

1.1 अलग्गिएका र खप्टिएका समूह (Disjoint and Overlapping sets)

क्रियाकलाप 1

दिइएको अवस्था अध्ययन गरी समूहमा छलफल गर्नुहोस् :

सार्क राष्ट्रहरूअन्तर्गत पर्ने देशहरूबिच फुटबल प्रतियोगिता गर्ने सोचका साथ ती देशहरूलाई तल दिइएअनुसार दुई समूहमा बाँडिएको छ । सार्क राष्ट्रअन्तर्गत आठओटा देशहरू पर्दछन् । यी राष्ट्रहरूमध्ये केही राष्ट्रहरू समुद्रसँग जोडिएका छन् भने केही राष्ट्रहरू त भूपरिवेष्टित छन् ।

पहिलो समूहमा भएका देशहरू = नेपाल, पाकिस्तान, भुटान, श्रीलङ्का

दोस्रो समूहमा पर्ने देशहरू = बङ्लादेश, मालदिभ्स, अफगानिस्तान, भारत

(क) यसलाई समूहमा कसरी जनाउन सकिन्छ होला ?

(ख) के समूहमा जनाउँदा एकभन्दा धेरै किसिमले जनाउन सकिन्छ त ?

(ग) यदि सकिन्छ भने तिनीहरू के के हुन् ?

यहाँ समूहलाई सूचीकरण विधिबाट देखाउँदा,

यदि सार्क राष्ट्रहरूको समूहलाई U ले जनाउने हो भने,

U = {नेपाल, भारत, भुटान, बङ्लादेश, पाकिस्तान, श्रीलङ्का, मालदिभ्स, अफगानिस्तान}

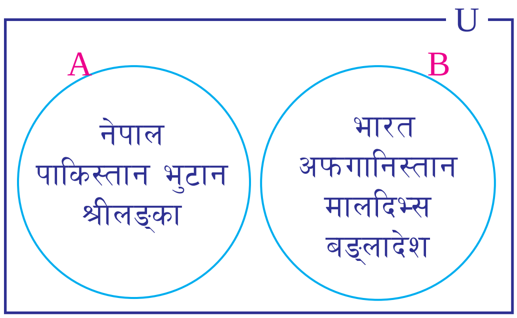
पहिलो समूहमा पर्ने देशहरूलाई A ले जनाउने हो भने,

A = {नेपाल, पाकिस्तान, भुटान, श्रीलङ्का}

दोस्रो समूहमा पर्ने देशहरूलाई B ले जनाउने हो भने,

B = {बङ्लादेश, मालदिभ्स, अफगानिस्तान, भारत}

समूह U, A र B को सम्बन्धलाई यसरी पनि देखाउन सकिन्छ ।

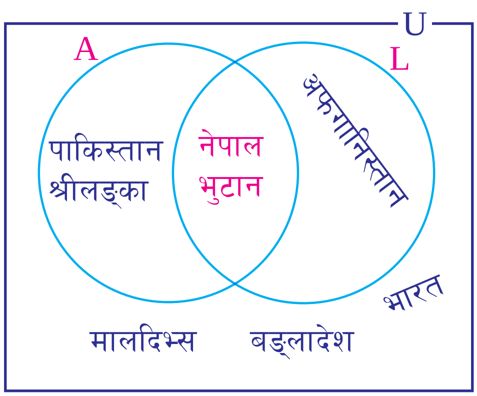


चित्र न. (क)

यदि भूपरिवेष्ठित राष्ट्रहरूको समूहमा पर्ने देशहरूको समूहलाई L ले जनाउने हो भने,

L = {नेपाल, अफगानिस्तान, भुटान}

समूह U, A र L को सम्बन्धलाई यसरी पनि देखाउन सकिन्छ ।



चित्र न. (ख)

चित्र न. (क) र (ख) मा समूहको सम्बन्धलाई देखाइएको छ । उक्त चित्रात्मक प्रस्तुतिलाई भेन चित्र भनिन्छ ।

समूह वा समूहका विभिन्न सम्बन्धहरूलाई जनाउने चित्रात्मक प्रस्तुतिलाई भेनचित्र (Venn Diagram) भनिन्छ । भेनचित्रमा प्रस्तुत गर्दा सर्वव्यापक समूहलाई आयतकार कोठामा र यसका अरू उपसमूहहरूलाई वृत्ताकार वा अन्डाकार आकृतिको प्रयोग गरिन्छ ।

भेनचित्रको प्रयोग सन् 1880 मा गणितज्ञ John Venn ले गरेका थिए । उनकै नामबाट यस चित्रलाई भेन चित्र भनिएको हो ।

माथि दिइएका दुईओटा भेनचित्रमा के फरक पाउनु भयो ? जोडीमा छलफल गर्नुहोस् ।

चित्र न. 1 मा के समूह A र समूह B मा पर्ने देशहरू एउटै छन् त ? छैनन्, अर्थात् समूह A र समूह B मा पर्ने देशहरू अलग अलग नै छन् । त्यसैले यिनीहरू अलग्गिएका समूह हुन् । त्यसै गरी चित्र न. 2 मा के समूह A मा भएका देशहरू समूह L मा पनि पर्छन् त ? नेपाल र भुटान दुवै समूहमा पर्छन् । त्यसैले समूह A र L खप्टिएका समूह हुन् ।

कुनै दुई वा दुईभन्दा बढी समूहमा कम्तीमा एउटा साझा सदस्य र कम्तीमा एउटा फरक सदस्य छ भने त्यस्ता समूहलाई खप्टिएका समूह (Overlapping Sets) भनिन्छ । कुनै दुई वा दुईभन्दा बढी समूहमा साझा सदस्य छैनन् भने त्यस्ता समूहलाई अलग्गिएका समूह (Disjoint Sets) भनिन्छ ।

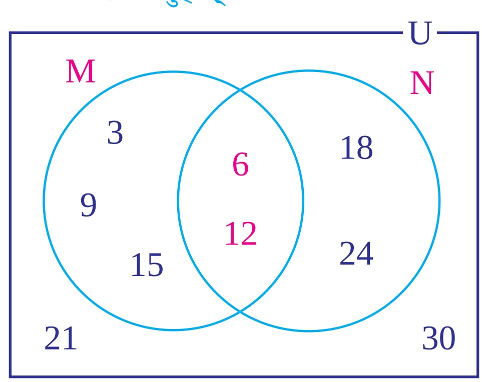
उदाहरण 1

दिइएको भेनचित्र अध्ययन गरी निम्नलिखित प्रश्नहरूको उत्तर लेख्नुहोस् :

(क) समूह M र N लाई सूचीकरण तथा व्याख्या विधिबाट लेख्नुहोस् ।

(ख) सर्वव्यापक समूह U निर्माण गर्नुहोस् ।

(ग) M र N अलग्गिएका समूह वा खप्टिएका समूह के हुन् र किन ?



समाधान

(क) व्यवस्था विधि : M ={15 सम्मका 3 का अपवर्त्यहरूको समूह}

वा {3 का पहिलो पाँचओटा अपवर्त्यहरू}

N = {24 सम्मका 6 का अपवर्त्यहरूको समूह}

वा {6 का पहिलो चारओटा अपवर्त्यहरू}

सूचीकरण विधि : M = {3,6,9,12,15}

N = {6,12,18,24}

(ख) सर्वव्यापक समूह U = {3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, 27, 30}

(ग) M र N खप्टिएका समूह हुन् किनभने M र N मा दुईओटा साझा सदस्य 6 र 12 छन् । त्यस्तै M र N मा कम्तीमा एकओटा फरक सदस्य पनि छन् ।

उदाहरण 2

P, Q र R सर्वव्यापक समूह U का उपसमूह हुन् । यदि U = {20 सम्मका 2 को अपवर्त्य}, P = {10 का गुणनखण्डहरू}, Q = {5 का अपवर्त्यहरू} र R = {6 का अपवर्त्यहरू} भए P र Q तथा Q र R को सम्बन्धलाई भेनचित्रमा प्रस्तुत गर्नुहोस् । साथै P र Q तथा Q र R को सम्बन्ध पनि उल्लेख गर्नुहोस् :

समाधान

यहाँ

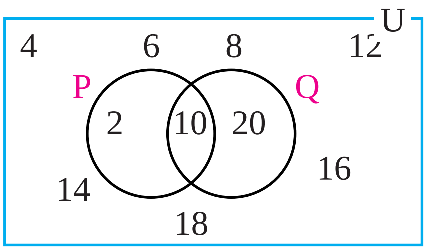
U = {2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20}

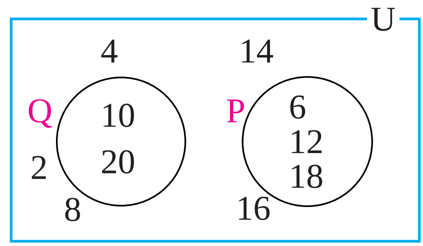
P = {2, 10}

Q = {10, 20}

R = {6, 12, 18} छ ।

अब,

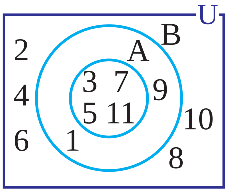
<table>
<tr>
<td>P र Q को सम्बन्धलाई भेनचित्रमा प्रस्तुत गर्दा,


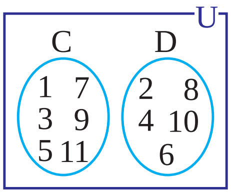
∴ P र Q खप्टिएका समूह हुन् ।</td>
<td>Q र R को सम्बन्धलाई भेनचित्रमा प्रस्तुत गर्दा,


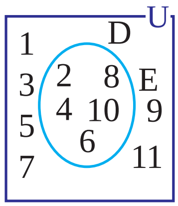
∴ Q र R अलग्गिएका समूह हुन् ।</td>
</tr>
</table>

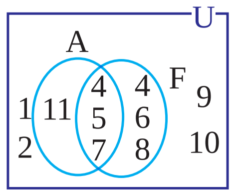
अभ्यास 1.1

1. **तलका भेनचित्रका आधारमा प्रत्येक समूहलाई सूचीकरण र व्याख्या दुवै विधिबाट लेख्नुहोस् । साथै सर्वव्यापक समूह U पनि निर्माण गर्नुहोस् :**

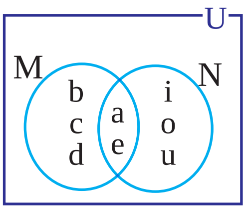
(क) 

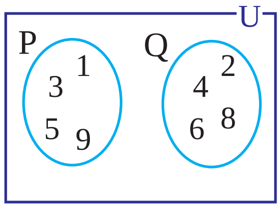
(ख) 

(ग) 

(घ) 

2. **दिइएका समूह खप्टिएका वा अलग्गिएका के कस्ता समूह हुन्, छुट्याउनुहोस् :**

(क) 

(ख) 

3. **दिइएका समूहका आधारमा खप्टिएका वा अलग्गिएका समूह छुट्याउनुहोस् :**

A = {2, 4, 6, 8, 10, 12}, B = {1, 3, 5, 7, 9, 11},

C = {0, 1, 3, 5, 7, 11}, D = {5, 6, 7, 8, 10}, E = {0, 2, 9, 12}

(क) A र B (ख) A र C (ग) B र C (घ) A र D (ङ) A र E

(च) B र D (छ) B र E (ज) C र D (झ) C र E (ञ) D र E

4. **यदि U = {a, b, c, d, e, f, g, h, i, j}, P = {a, b, c, d, e, i}, Q = {a, e, i}, R = {b, c, d, j}, S = {i, e, a} र T = {a, b, c, f, छ भने तलका समूहलाई छुट्टाछुट्टै भेनचित्रमा प्रस्तुत गरी देखाउनुहोस् । साथै अलग्गिएका समूह वा खप्टिएका समूह के हुन्, छुट्याउनुहोस् :**

(क) P र Q (ख) Q र R (ग) Q र S (घ) R र T

5. **यदि A = {0, 1, 2, 3, 4, 5} भए तलका समूहलाई सूचीकरण विधिबाट लेख्नुहोस् :**

(क) A का प्रत्येक सदस्यहरूमा 1 जोड्दा बन्ने समूह B

(ख) A का प्रत्येक सदस्यहरूलाई 2 ले गुणन गर्दा बन्ने सदस्य समूह C

(ग) A मा भएका बिजोर सङ्ख्याहरूको समूह D

(घ) A मा भएका 10 का गुणनखण्डहरूको समूह E

(ङ) माथिको समूहलाई बुझाउने सर्वव्यापक समूह लेख्नुहोस् ।

माथिका समूह A, B, C, D र E मा खप्टिएका र अलग्गिएका समूह छुट्याउनुहोस् ।

6. यदि : = {x:x एउटा 40 सम्मका 5 को अपवर्त्य} भए तलका समूहलाई सूचीकरण विधिबाट लेख्नुहोस् :

(क) M का प्रत्येक सदस्यहरूमा 3 जोड्दा बन्ने समूह N

(ख) M का प्रत्येक सदस्यहरूलाई 2 ले गुणन गर्दा बन्ने सदस्य समूह P

(ग) M मा भएका बिजोर सङ्ख्याहरूको समूह Q

(घ) M मा भएका 10 का अपवर्त्यहरूको समूह R

माथिका समूह M, N, P, Q र R मा खप्टिएका र अलग्गिएका समूह छुट्याउनुहोस् ।

परियोजना कार्य

(क) तपाईंको समुदायमा पाइने कुनै दुई घरपालुवा जनावरका विशेषता टिपोट गर्नुहोस् । तिनीहरूका विशेषता बुझाउने दुई फरक फरक समूह निर्माण गर्नुहोस् । ती समूहको सम्बन्धको भेनचित्र निर्माण गरी अलग्गिएका वा खप्टिएको के कस्तो समूह बन्यो ? कक्षाकोठामा प्रस्तुत गर्नुहोस् ।

(ख) तपाईंको कक्षाकोठामा भएका सबै साथीहरूलाई सर्वव्यापक समूह U बनाई तल दिइएका कार्यहरू गर्नुहोस् ।

(अ) दही मन पराउने र दुध मन पराउने साथीहरूको समूहलाई छुट्टा छुट्टै दुई समूह नामकरण गर्नुहोस् र ती दुई समूहको सम्बन्धलाई भेनचित्रमा प्रस्तुत गर्नुहोस् ।

(आ) ती समूहहरू अलग्गिएका वा खप्टिएका के हुन्, छुट्याउनुहोस् ।

उत्तर

शिक्षकलाई देखाउनुहोस् ।

1.2 उपसमूह (Subset)

क्रियाकलाप 2

शान्तिले आफ्नो जन्मदिनको उपलक्ष्यमा तीन जना साथीहरू डोल्मा, राकेश र लक्ष्मीलाई बोलाइन् । अब उनको जन्मदिनमा आएका साथीहरूबाट बन्न सक्ने समूह बनाउनुहोस् :

(क) तीनै जना साथीको समूह

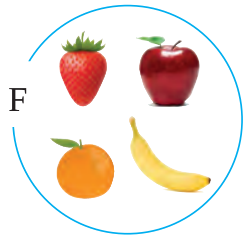
(ख) दुई दुई जना साथीको समूह

यदि A र B दुईओटा समूह हुन् । समूह A मा भएका सबै सदस्यहरू समूह B मा पनि पर्दछन् भने समूह A लाई समूह B को उपसमूह (Subset) भनिन्छ । यसलाई सङकेतमा $A \subset B$ वा $B \supset A$ लेखिन्छ ।

1.2.1 उपयुक्त र अनुपयुक्त उपसमूह (Proper and Improper Subsets)

क्रियाकलाप 3

चित्रमा फलफूलको एउटा समूह F दिइएको छ :



(क) समूह F बाट बन्न सक्ने उपसमूह बनाउनुहोस् ।

(ख) समूह F बाट बनाइएका उपसमूहमध्ये केही सदस्यहरू मात्र लिएर बनाइएका र सबै सदस्यहरू लिएर बनाइएका समूह कुन कुन हुन् ?

(ग) केही सदस्यहरू मात्र लिएर बनाइएका समूहलाई र सबै सदस्यहरू लिएर बनाइएका समूहलाई गणितीय सङ्केतमा कसरी जनाइन्छ, होला ?

यदि समूह A मा भएका केही सदस्यहरू मात्र लिएर उपसमूह B बनाइन्छ भने उपसमूह B लाई समूह A को उपयुक्त उपसमूह (Proper Subset) भनिन्छ । यसलाई सङ्केतमा $B \subset A$ वा $A \supset B$ लेखिन्छ । अथवा

यदि B समूह A को उपसमूह हो र उपसमूह B को सदस्य सङ्ख्या A भन्दा कम छ भने त्यस्तो उपसमूहलाई समूह A को उपयुक्त उपसमूह (Proper Subset) भनिन्छ । त्यसकारण खाली समूह सबै (खाली समूहबाहेक) समूहको उपयुक्त उपसमूह हो ।

यदि समूह A मा भएका सबै सदस्यहरू लिएर उपसमूह B बनाइन्छ भने उपसमूह B लाई समूह A को अनुपयुक्त उपसमूह (Improper Subset) भनिन्छ । यसलाई सङ्केतमा $B \subseteq A$ वा $A \supseteq B$ लेखिन्छ । बराबर समूह आपसमा अनुपयुक्त उपसमूह हुन्छन् ।

उदाहरण 1

समूह M = {s, k, y} का सबै उपसमूह बनाई नामकरण समेत गर्नुहोस् । साथै समूह M का उपयुक्त र अनुपयुक्त उपसमूह पनि छुट्याउनुहोस् :

समाधान

समूह M = {s, k, y} बाट बन्ने उपसमूह :

कुनै पनि सदस्य नभएको उपसमूह A = { }

एउटा मात्र सदस्य भएको उपसमूह B = {s}, C = {k}, D = {y}

दुईओटा मात्र सदस्य भएको उपसमूह E = {s, k}, F = {s, y}, G = {k, y}

सबै सदस्य भएको उपसमूह H = {s, k, y}

यहाँ उपयुक्त उपसमूह A = { }, B = {s}, C = {k}, D = {y},
E = {s, k}, F = {s, y}, G = {k, y}

अनुपयुक्त उपसमूह H ={s, k, y}

उदाहरण 2

X र Y सर्वव्यापक समूह U का उपसमूह हुन् । यदि U = {y : y एउटा 20 सम्मका 2 को अपवर्त्य हो}, X = {20 का गुणनखण्डहरू} र Y = {5 का अपवर्त्यहरू भए X र Y को सम्बन्धलाई भेनचित्रमा प्रस्तुत गर्नुहोस्, साथै X र Y को सम्बन्ध पनि उल्लेख गर्नुहोस् :

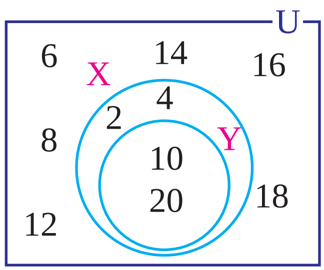
समाधान

यहाँ U = {2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20}

X = {2, 4, 10, 20}

Y = {10, 20} छ ।

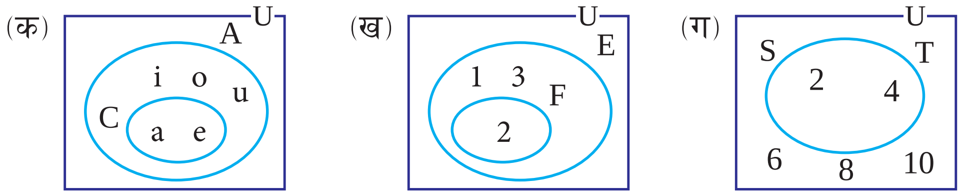
अब X र Y को सम्बन्धलाई भेनचित्रमा प्रस्तुत गर्दा,



$\therefore$ X को उपयुक्त उपसमूह Y हो । यसलाई सङ्केतमा $Y \subset X$ लेखिन्छ ।

अभ्यास 1.2

1. **तलका भेनचित्रका आधारमा उपयुक्त वा अनुपयुक्त उपसमूह छुट्याई सङ्केतमा लेख्नुहोस् :**



2. **यदि N = {x:x एउटा 5 सम्मका गन्तीका सङ्ख्या} भए, समूह N लाई सूचीकरण विधिमा लेख्नुहोस् र यसबाट बन्ने निम्न उपसमूह बनाई नामकरण गर्नुहोस् :**

(क) सबै एक सदस्यीय उपसमूह

(ख) सबै दुई सदस्यीय उपसमूह

(ग) सबै तीन सदस्यीय उपसमूह

(घ) सबै चार सदस्यीय उपसमूह

(ङ) सबै पाँच सदस्यीय उपसमूह

(च) एउटा खाली उपसमूह पनि बनाउनुहोस् र N बाट जम्मा कतिओटा उपसमूह बने लेख्नुहोस् ।

3. **तलका समूहबाट बन्न सक्ने सबै उपसमूह बनाई नामकरण गर्नुहोस् :**

(क) F = {आँप}

(ख) V = {मुला, फर्सी}

(ग) T = {बस, जिप, जहाज}

(घ) A = {कुकुर, बिरालो, घोडा, गाई}

(ङ) B = {परेवा, काग, चिल, सुगा, बकुल्ला}

4. प्रश्न नं. 3 बाट बनाइएका उपसमूहबाट उपयुक्त र अनुपयुक्त उपसमूह छुट्याउनुहोस् ।

5. प्रश्न न. 3 को आधारमा तलको तालिका कापीमा बनाई भर्नुहोस् :

क्र.स.	समूह	सदस्य सङ्ख्या	उपसमूह	उपसमूहको सङ्ख्या
1.	{आँप}	1	....	....
2.	{मुला, फर्सी}	2	....	....
3.	{बस, जिप, जहाज}	....	....	....
4.	{कुकुर, बिरालो, घोडा, गाई}	....	....	....
5.	{परेवा, काग, चिल, सुगा, बकुल्ला}	....	....	....

माथिको तालिकाका आधारमा कुनै पनि समूहबाट बन्न सक्ने सम्भाव्य उपसमूहको सङ्ख्या निकाल्ने सूत्र निकाल्नुहोस् ।

6. यदि E = {2, 3, 5, 7} भए यसबाट 3 ओटा उपयुक्त उपसमूह निर्माण गरी छुट्टाछुट्टै भेनचित्रमा देखाउनुहोस् ।

परियोजना कार्य

(क) तपाईंको घरमा भएका व्यक्तिहरूलाई सर्वव्यापक समूह बनाई तल दिइएका कार्यहरू गर्नुहोस् :

(क) खाजाका रूपमा रोटी मन पराउनेको एउटा समूह बनाउनुहोस् ।

(ख) रोटीअन्तर्गत गहुँको रोटी, मकैको रोटी वा कोदोको रोटी मन पराउनेको उपसमूह बनाई त्यसलाई भेनचित्रमा प्रस्तुत गर्नुहोस् ।

उत्तर

शिक्षकलाई देखाउनुहोस् ।

मिश्रित अभ्यास

1. **यदि P = {2, 3, 5} भए यसबाट बन्ने सबै उपसमूह निर्माण गर्नुहोस् । र उपयुक्त र अनुपयुक्त उपसमूह पनि छुट्याउनुहोस् ।**

2. **सर्वव्यापक समूह U का उपसमूहहरू A = { 2, 4, 6} र B = {1,2,3} छन् ।**

   (क) समूह A र समूह B खप्टिएका वा अलग्गिएका कस्ता समूह हुन्, कारण दिनुहोस् ।

   (ख) समूह A बाट बन्ने अनुपयुक्त उपसमूह लेख्नुहोस् ।

   (ग) समूह A र B का साझा उपयुक्त उपसमूह के के हुन्? लेख्नुहोस् ।

3. **समूह A = {3, 5} र B = {2,4,7} छन् ।**

   (क) समूह A बाट बन्ने उपयुक्त उपसमूहहरू निर्माण गर्नुहोस् ।

   (ख) समूह A र समूह B लाई खप्टिएका समूह बनाउन समूह A मा कुन सदस्य थप्नुपर्ला ? कारणसहित लेख्नुहोस् ।

4. **सर्वव्यापक समूह U = (1,2,3,4,5} का उपसमूहहरू Q = {1, 3, 5} र R = {1,2,3} छन् ।**

   (क) समूह Q बाट बन्ने उपयुक्त र अनुपयुक्त उपसमूह लेख्नुहोस् ।

   (ख) समूह R र समूह Q को साझा उपयुक्त उपसमूह के के हुन्, लेख्नुहोस् ।

   (ग) समूह R र समूह Q लाई भेनचित्रमा प्रस्तुत गर्नुहोस् ।

5. **U = {20 सम्मका प्राकृतिक सङ्ख्याहरू}, A = {10 सम्मका जोर सङ्ख्याहरू }, B = {10 सम्मका बिजोर सङ्ख्याहरू}, C = {10 सम्मका रूढ सङ्ख्याहरू } र D = { 2 का अपवर्त्यहरू} छन् :**

   दिइएका समूहहरू अलग्गिएका वा खप्टिएका कस्ता समूह हुन्, लेख्नुहोस् र भेनचित्रमा देखाउनुहोस् ।

   (क) A र B (ख) A र C (ग) A र D (घ) B र C

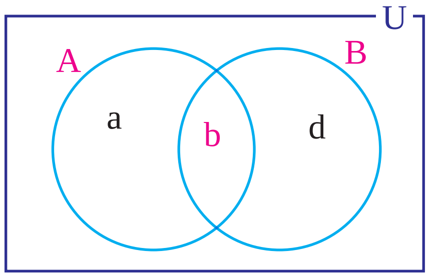
   (ङ) B र D (च) C र D

6. **समूह A र समूह B का सदस्यहरूलाई सँगैको भेन चित्रमा देखाइएको छ ।**

   (क) समूह A र समूह B खप्टिएका वा अलग्गिएका कस्ता समूह हुन्, कारण लेख्नुहोस् ।

   (ख) समूह A बाट बन्ने कुनै २ ओटा उपयुक्त उपसमूहहरू लेख्नुहोस् ।

(ग) माथि दिइएका खप्टिएका समूहहरू A र B लाई अलग्गिएका समूह बनाउन के गर्नुपर्छ ? कारणसहित लेख्नुहोस् ।

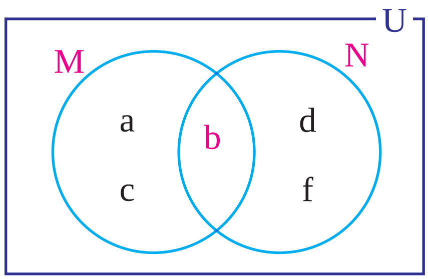


7. समूह M र समूह N का सदस्यहरूलाई सँगैको भेन चित्रमा देखाइएको छ ।

(क) समूह M र N बाट बन्ने उपयुक्त र अनुपयुक्त उपसमूहहरू लेख्नुहोस् ।

(ख) के समूह M र N बाट बन्ने उपयुक्त उपसमूहहरू बराबर संख्यामा छन् ?

(ग) समूह M बाट कुन सदस्य झिक्यो भने समूहहरू M र N अलग्गिएका समूह बन्छन्, लेख्नुहोस् ।



8. यदि S = {s, o, n, y} भए यसबाट बन्ने कुनै 5 ओटा उपयुक्त उपसमूह S_1, S_2, S_3, S_4 र S_5 निर्माण गर्नुहोस् र तलका सम्बन्धलाई भेन चित्रमा देखाउनुहोस् :

(क) S_1 र S_2 (ख) S_1 र S_3 (ग) S_1 र S_4

(घ) S_1 र S_5 (ङ) S_2 र S_3 (च) S_2 र S_4

(छ) S_2 र S_5 (ज) S_3 र S_4 (झ) S_3 र S_5

(ञ) S_4 र S_5

9. समूह A = { 0, 2 } , B = { 1, 2 } र C = { 2 देखि 5 सम्मका वर्ग सङ्ख्याहरू } सर्वव्यापक समूह U का उपसमूहहरू हुन् भने

(क) समूह **C** बाट बन्ने उपयुक्त र अनुपयुक्त उपसमूहहरू लेख्नुहोस् ।

(ख) समूह **A** र समूह **B** लाई भेनचित्रमा देखाउनुहोस् ।

(ग) समूह **A** र समूह **C** मध्ये कुन समूहको उपसमूह बढी हुन्छन्, कारण दिनुहोस् ।

पाठ 2

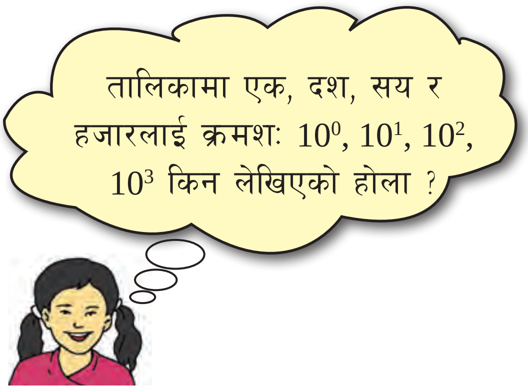
पूर्ण सङ्ख्या (Whole Numbers)

2.0 पुनरवलोकन (Review)

दिइएको अवस्थाको अध्ययन गरी छलफल गर्नुहोस् :

सँगैको तालिकामा 1256 लाई स्थानमान तालिकामा देखाइएको छ ।

हजार	सय	दश	एक
10^3	10^2	10^1	10^0
1	2	5	6



1256 लाई विस्तारित रूपमा लेख्दा,

$1256 = 1 \times 1000 + 2 \times 100 + 5 \times 10 + 6 \times 1$

$= 1 \times 10^3 + 2 \times 10^2 + 5 \times 10^1 + 6 \times 10^0$

कुनै पनि सङ्ख्यालाई 10 को प्रयोग गरी विस्तारित रूपमा लेखिन्छ र स्थानमान तालिकामा एक, दश, सय, हजार, ... वा 10^0, 10^1, 10^2, 10^3, 10^4, ... हुन्छ भने त्यस्तो सङ्ख्या पद्धतिलाई दशमलव सङ्ख्या पद्धति (decimal numeration system) भनिन्छ । यसमा 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 र 9 गरी 10 ओटा अङ्कहरू प्रयोग गरिन्छ । हिन्दु अरेबिक सङ्ख्या पद्धतिमा सङ्ख्यालाई 10 को घातका रूपमा व्यक्त गरिन्छ,

जस्तै : $24 = 2 \times 10 + 4 = 2 \times 10^1 + 4 \times 10^0$,

$576 = 5 \times 100 + 7 \times 10 + 6 = 5 \times 10^2 + 7 \times 10^1 + 6 \times 10^0$

2.1 द्विआधार सङ्ख्या पद्धति (Binary Number System)

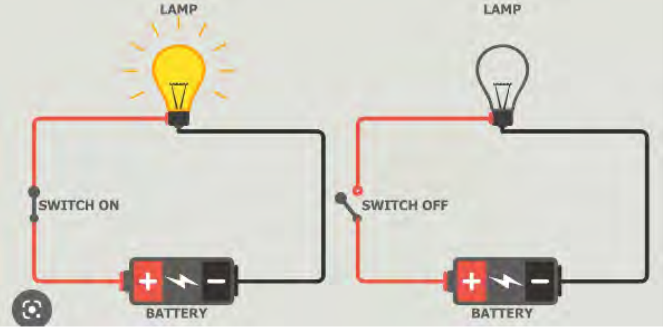
2.1.1 द्विआधार सङ्ख्या पद्धतिको परिचय

क्रियाकलाप 1

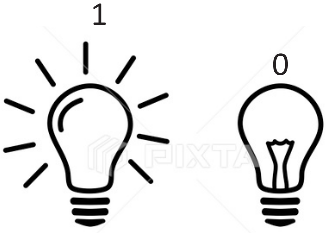
दिइएको चित्र विद्युतीय सर्किट (electrical circuit) को हो । चित्रको अवलोकन गरी निम्नलिखित प्रश्नहरूमा छलफल गर्नुहोस् :

(क) विद्युतीय सर्किट (electrical circuit) मा कतिओटा प्रक्रियाहरू हुन्छन् ? ती के के हुन् ?

(ख) हामीले घरमा बाल्ने बिजुली बत्ती र चित्रमा देखाइएजस्तै विद्युतीय सर्किटका बिच कस्तो सम्बन्ध छ ?



यहाँ विद्युतीय सर्किट (electrical circuit) मा जस्तै 'खोल्ने (on)' र 'बन्द गर्ने (off)' दुईओटा प्रक्रियाहरू हुन्छन् । जसमा on गर्दा बत्ती बल्ने र off गर्दा बत्ती निभ्ने हुन्छ । यसलाई पनि क्रमशः सङ्केत 1 र 0 ले जनाउन सकिन्छ ।



क्रियाकलाप 2

दशमलव सङ्ख्या पद्धतिमा 0 देखि 150 सम्मका सङ्ख्याहरूमा 1 र 0 प्रयोग भई बनेका सङ्ख्याहरू जोडीमा छलफल गरी टिपोट गर्नुहोस् । अब ती सङ्ख्याहरूलाई सानोदेखि ठुलोको क्रममा क्रमशः गन्ती गर्दै त्यसलाई दशमलव सङ्ख्या प्रणालीका सङ्ख्याहरूसँग तुलना गर्नुहोस् ।

यहाँ,

दशमलव सङ्ख्या पद्धतिमा 1 र 0 प्रयोग भई बनेका सङ्ख्याहरू,

0, 1, 10, 11, 100, 101, 110, 111

अब

1, 10 गर्दै क्रमशः गन्ती गर्ने हो भने यसलाई दशमलव सङ्ख्या प्रणालीका सङ्ख्याहरूसँग यसरी तुलना गर्न सकिन्छ ।

द्विआधार सङ्ख्या प्रणाली	1	10	11	100	101	110	111	....	....	......
दशमलव सङ्ख्या प्रणाली	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

दशमलव सङ्ख्या पद्धतिमा 10 ओटा अङ्क प्रयोग भएजस्तै द्विआधार सङ्ख्या पद्धतिमा 0 र 1 गरी दुईओटा मात्र अङ्कहरू प्रयोग गरी सङ्ख्याहरू बनेका हुन्छन् । द्विआधार सङ्ख्या पद्धतिमा सङ्ख्याहरूलाई क्रमशः गन्ती गर्दा{ 1, 10, 11, 100,.....} हुन्छ ।

2.1.2 द्विआधार सङ्ख्या पद्धति र यसको विस्तार

क्रियाकलाप 3

दिइएका सङ्ख्यालाई द्विआधार स्थानमान तालिकामा कसरी देखाउने होला, छलफल गर्नुहोस् ।

1_2 , 10_2 , 11_2 ,100_2 , 100101_2,

द्विआधार पद्धतिमा स्थानमान तालिकालाई निम्नानुसार देखाउन सकिन्छ :

सोर	आठ	चार	दुई	एक
2^4	2^3	2^2	2^1	2^0

प्रस्तुत तालिकाको प्रयोगले द्विआधार सङ्ख्यालाई विस्तारित रूपमा लेख्न सकिन्छ :

$1_2 = 1\times 2^0$

$10_2 = 1 \times 2^1 + 0 \times 2^0$

$11_2 = 1 \times 2^1 + 1 \times 2^0$

$100_2 = 1 \times 2^2 + 0 \times 2^1 + 0 \times 2^0$

$101_2 = 1 \times 2^2 + 0 \times 2^1 + 1 \times 2^0$

दशमलव सङ्ख्या पद्धतिअनुसारको स्थानमान तालिकामा एक, दश, सय, हजार, ... वा 10^0, 10^1, 10^2, 10^3, ... लेखिए जस्तै द्विआधार पद्धतिअनुसार स्थानमान तालिकामा एक, दुई, चार, आठ, सोर, बत्तिस, ...वा 2^0, 2^1, 2^2, 2^3, 2^4, ... हुन्छ । द्विआधार सङ्ख्या पद्धतिमा सङ्ख्याहरूलाई 2 को घात प्रयोग गरी लेखिन्छ । द्विआधार सङ्ख्यालाई जनाउन सङ्ख्याको पछाडि आधारमा सानो अक्षरमा 2 लेखिन्छ । जस्तैः 101_2, 111_2 ......

2.1.3 दशमलव सङ्ख्या पद्धतिबाट द्विआधार सङ्ख्या पद्धतिका रूपान्तरण

क्रियाकलाप 4

27 र 29 लाई आधार 2 को घातको समूहमा विभाजन गर्नुहोस् । ती दुई प्रक्रियाबिचको तुलना गर्नुहोस् :

यहाँ,

$27 = 16 + 8 + 2 + 1$

$= 1 \times 2^4 + 1 \times 2^3 + 1 \times 2^1 + 1 \times 2^0$

स्थानमान तालिकामा,

सोर	आठ	चार	दुई	एक
2^4	2^3	2^2	2^1	2^0
1	1	0	1	1

$\therefore 27 = 1 \times 2^4 + 1 \times 2^3 + 0 \times 2^2 + 1 \times 2^1 + 1 \times 2^0 = 11011_2$

$29 = 16 + 8 + 4 + 1$

$=2^4 + 2^3 + 2^2 + 1$

$= 1 \times 2^4 + 1 \times 2^3 + 1 \times 2^2 + 0 \times 2^1 + 1 \times 2^0$

स्थानमान तालिकामा,

सोर	आठ	चार	दुई	एक
2^4	2^3	2^2	2^1	2^0
1	1	1	0	1

$\therefore 29 = 1 \times 2^4 + 1 \times 2^3 + 1 \times 2^2 + 0 \times 2^1 + 1 \times 2^0 = 11101_2$ हुन्छ ।

यहाँ,

दुवै प्रक्रियामा पहिला 2 को घातका रूपमा लेख्न सकिने र बाँकी सङ्ख्यामा 27 र 29 लाई क्रमशः टुक्र्याइएको छ । त्यसपछि ती सङ्ख्यालाई 2 को घाताङ्कको समूहमा लेखिएको छ ।

माथि छलफल गरिएको क्रियाकलापका आधारमा के दशमलव सङ्ख्या 27 लाई द्विआधार सङ्ख्या पद्धतिमा यसरी बदल्न सकिन्छ ? अध्ययन गरी साथीहरूसँग छलफल गर्नुहोस् ।

		शेष
2	27	
2	13	1
2	6	1
2	3	0
2	1	1
	0	1

- आधार 10 मा शेष 0 देखि 9 सम्म हुन्छ ।
- आधार 2 मा शेष 0 देखि 1 मात्र हुन्छ ।

तसर्थ कुनै सङ्ख्यालाई द्विआधारमा रूपान्तरण गर्न 2 ले भाग गर्ने र शेष लेख्दै जाने गर्नुपर्छ ।

अब शेषहरूलाई क्रमशः तलबाट माथिको क्रममा लेख्दा 11011 हुन्छ ।

तसर्थ $27 = 11011_2$ लेखिन्छ ।

यसै गरी 29 लाई पनि द्विआधार सङ्ख्या पद्धतिमा रूपान्तरण गर्नुहोस् ।

दशमलव सङ्ख्या पद्धतिबाट द्विआधार सङ्ख्या पद्धतिमा रूपान्तरण गर्दा दशमलवमा भएको सङ्ख्यालाई 2 ले भाग गर्दै जाने र भागफलमा 0 नआएसम्म भाग गरिरहनुपर्छ । अनि शेषलाई दायाँतर्फ लेख्दै जानुपर्छ र अन्त्यमा तलपट्टिबाट माथितिर क्रमशः शेषलाई मिलाएर लेख्नुपर्छ ।

उदाहरण 1

43 लाई 2 को घात प्रयोग गरी विस्तारित रूपमा लेख्नुहोस् :

समाधान

43 लाई 2 को घातको समूहमा विभाजन गर्दा,

$$43 = 32 + 8 + 2 + 1$$

$$= 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 + 2 \times 2 \times 2 + 2 + 1$$

$43 = 1 \times 2^5 + 0 \times 2^4 + 1 \times 2^3 + 0 \times 2^2 + 1 \times 2^1 + 1 \times 2^0$ हुन्छ ।

उदाहरण 2

25 लाई द्विआधार सङ्ख्या पद्धतिमा रूपान्तरण गर्नुहोस् :

समाधान

यहाँ 25 लाई द्विआधार सङ्ख्या प``तिमा रूपान्तरण गर्दा,

2	25	
2	12	... 1
2	6	... 0
2	3	... 0
2	1	...1
	0	...1

$\therefore 25 = 11001_2$

2.1.4 द्विआधार सङ्ख्या पद्धतिबाट दशमलव सङ्ख्या पद्धतिमा रूपान्तरण

क्रियाकलाप 5

द्विआधार पद्धतिको सङ्ख्या 100101_2 लाई तलको स्थानमान तालिकामा देखाइएको छ । स्थानमान तालिकाको अध्ययन गरी दिइएका प्रश्नहरूमा छलफल गर्नुहोस् :

दशआधारमा	32	16	8	4	2	1
द्विआधारमा	2^5	2^4	2^3	2^2	2^1	2^0
	1	0	0	1	0	1

(क) के 100000_2 लाई दशमलव सङ्ख्या पद्धतिमा 32 लेख्न सकिन्छ, कसरी ?

(ख) 101_2 लाई दशमलव सङ्ख्या पद्धतिमा कसरी लेखिन्छ ?

(ग) के द्विआधार सङ्ख्या पद्धतिमा 00101_2 लेख्न सकिन्छ ? यसको मान दशमलव सङ्ख्या पद्धतिमा कसरी लेखिन्छ ?

(घ) 100101_2 लाई दशमलव सङ्ख्या पद्धतिमा कसरी लेखिन्छ ?

यहाँ 100101_2 लाई 2 को घात प्रयोग गरी विस्तारित रूपमा लेख्दा,

$100101_2 = 1 \times 2^5 + 0 \times 2^4 + 1 \times 2^2 + 0 \times 2^1 + 1 \times 2^0$

$= 1 \times 32 + 0 \times 16 + 0 \times 8 + 1 \times 4 + 0 \times 2 + 1 \times 1$

अब दशमलव सङ्ख्या पद्धतिअनुसार लेख्दा,

$32 + 4 + 1 = 37$ हुन्छ । तर आधार 10 लेख्ने गरिँदैन ।

$\therefore 100101_2 = 37$

द्विआधार सङ्ख्या पद्धतिलाई दशमलव सङ्ख्या पद्धतिमा रूपान्तरण गर्नका लागि 2 को घात प्रयोग भएको विस्तारित रूपमा लेखी त्यसको सरल गर्नुपर्छ ।

उदाहरण 3

तलका द्विआधार सङ्ख्यालाई दशमलव पद्धतिमा रूपान्तरण गर्नुहोस् :

(क) 1001_2 (ख) 1111_2 (ग) 1001011_2 (घ) 1100101_2

समाधान

(क) $1001_2 = 1 \times 2^3 + 0 \times 2^2 + 0 \times 2^1 + 1 \times 2^0$

$= 8 + 0 + 0 + 1$

$= 9$

$\therefore 1001_2 = 9$

(ख) $1111_2 = 1 \times 2^3 + 1 \times 2^2 + 1 \times 2^1 + 1 \times 2^0$

$= 8 + 4 + 2 + 1$

$= 15$

$\therefore 1111_2 = 15$

(ग) $1001011_2 = 1 \times 2^6 + 0 \times 2^5 + 0 \times 2^4 + 1 \times 2^3 + 0 \times 2^2 + 1 \times 2^1 + 1 \times 2^0$

$= 64 + 8 + 2 + 1$

$= 75$

$\therefore 1001011_2 = 75$

(घ) $1100101_2 = 1 \times 2^6 + 1 \times 2^5 + 0 \times 2^4 + 0 \times 2^3 + 1 x 2^2 + 0 \times 2^1 + 1 \times 2^0$

$= 64 + 32 + 4 + 1$

$= 101$

$\therefore 1100101_2 = 101$

2.2 पञ्चआधार सङ्ख्या पद्धति (Quinary Number System)

2.2.1. पञ्चआधार सङ्ख्या पद्धतिको परिचय

क्रियाकलाप 6

दशमलव सङ्ख्या पद्धतिमा लेखिएका 0 देखि 59 सम्मका सङ्ख्याहरूको तालिका दिइएको छ । तालिकामा 0, 1, 2, 3 र 4 प्रयोग भई बनेका सङ्ख्याहरूलाई गोलो घेरा लगाउनुहोस् ।

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
20	21	22	23	24	25	26	27	28	29
30	31	32	33	34	35	36	37	38	39
40	41	42	43	44	45	46	47	48	49
50	51	52	53	54	55	56	57	58	59

अब ती सङ्ख्याहरूलाई सानोदेखि ठुलोको क्रममा क्रमशः गन्ती गर्दै त्यसलाई दशमलव सङ्ख्या प्रणालीका सङ्ख्याहरूसँग तुलना गर्नुहोस् ।

यहाँ 1, 2, 3, 4, 10, 11 गर्दै क्रमशः गन्ती गर्ने हो भने यसलाई दशमलव सङ्ख्या प्रणालीका सङ्ख्याहरूसँग यसरी तुलना गर्न सकिन्छ ।

पञ्चआधार सङ्ख्या प्रणाली	1	2	3	4	10	11	12	13	14	20	.....	.....	.....
दशमलव सङ्ख्या प्रणाली	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	.....	.....	.....

दशमलव सङ्ख्या पद्धतिमा 10 ओटा अङ्क प्रयोग भएजस्तै पञ्चआधार सङ्ख्या पद्धतिमा 0, 1, 2, 3 र 4 गरी पाँचओटा मात्र अङ्कहरू प्रयोग गरी सङ्ख्याहरू बनेका हुन्छन् । पञ्चआधार सङ्ख्या पद्धतिमा सङ्ख्याहरूलाई क्रमशः गन्ती गर्दा 1, 2, 3, 4, 10, 11, 12, 13, 14, 20,..... हुन्छ ।

2.2.2. पञ्चआधार सङ्ख्या पद्धति र यसको विस्तार

क्रियाकलाप 7

कक्षामा आवश्यकताअनुसार समूहमा बस्नुहोस् । तल चित्रमा दिइएको जस्तै गरी 27 ओटा कलम जम्मा पार्नुहोस् । अब सबै कलमहरूलाई 5/5 ओटाको समूहमा विभाजन गर्नुहोस् । 5 ओटा कलमको समूहलाई 5 को घातको रूपमा लेख्नुहोस् । सोहीअनुसार 27 लाई 5 को घातका रूपमा कसरी लेख्नुभयो ? साथीहरूसँग छलफल गर्नुहोस् ।

यहाँ,

$\therefore 27 \quad = 5 + 5 + 5 + 5 + 5 + 2$

$= 5 \times 5 + 2$

$= 5^2 + 2 \times 1$

$= 1 \times 5^2 + 2 \times 50$

$= 1 \times 5^2 + 0 \times 5^1 + 2 \times 5^0$

माथिको छलफलमा जस्तै गरी 179 लाई 5 को घात प्रयोग भएका समूहमा विभाजन गर्नुहोस् ।

यहाँ,

$179 = 125 + 50 + 4$

$= 125 + 2 \times 25 + 4$

$= 5 \times 5 \times 5 + 2 \times 5 \times 5 + 4 \times 1$

$= 5^3 + 2 \times 5^2 + 4 \times 5^0$

$= 1 \times 5^3 + 2 \times 5^2 + 0 \times 5^1 + 4 \times 5^0$

क्रियाकलाप 8

दिइएका सङ्ख्यालाई पञ्चआधार स्थानमान तालिकामा कसरी देखाउने होला, यसको विस्तार कसरी लेख्ने होला, छलफल गर्नुहोस् ।

$1_5, 43_5, 104_5, 1340_5$

पञ्चआधार पद्धतिमा स्थानमान तालिकालाई निम्नानुसार देखाउन सकिन्छ :

एक सय पच्चिस	पच्चिस	पाँच	एक
5^3	5^2	5^1	5^0

प्रस्तुत तालिकाको प्रयोगले पञ्चआधार सङ्ख्यालाई विस्तृत रूपमा लेख्न सकिन्छ :

$1_5 = 50$

$43_5 = 4 \times 5^1 + 3 \times 5^0$

$104_5 = 1 \times 5^2 + 0 \times 5^1 + 4 \times 5^0$

$1340_5 = 1 \times 5^3 + 3 \times 5^2 + 4 \times 5^1 + 0 \times 5^0$

1340_5 लाई स्थानमान तालिकामा राख्दा,

एक सय पच्चिस	पच्चिस	पाँच	एक
1	3	4	0

दशमलव सङ्ख्या पद्धतिमा 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 र 9 गरी 10 ओटा अङ्कहरू प्रयोग गरे जस्तै कुनै पनि सङ्ख्यालाई 0, 1, 2, 3 र 4 को मात्र प्रयोग गरी 5 को घातका रूपमा लेखिन्छ । स्थानमान तालिकामा एक, पाँच, पच्चिस, एक सय पच्चिस, 5 सय पच्चिस, ... वा $5^0, 5^1, 5^2, 5^3, 5^4, \ldots$ हुन्छ भने त्यस्तो सङ्ख्या पद्धतिलाई पञ्चाधार सङ्ख्या पद्धति (quinery numeration system) भनिन्छ ।

2.2.3 दशमलव सङ्ख्या पद्धतिबाट पञ्चआधार सङ्ख्या पद्धतिमा रूपान्तरण

क्रियाकलाप 9

दशमलव सङ्ख्या 432 लाई पञ्चआधार सङ्ख्यामा कसरी लेख्ने होला, साथीहरूसँग छलफल गर्नुहोस् ।

यहाँ 432 लाई पञ्चआधार सङ्ख्या पद्धतिमा रूपान्तरण गर्दा,

5	432	
5	86	2
5	17	1
5	3	2
	0	3

$432 = 3212_5$

दशमलवमा भएको सङ्ख्यालाई पञ्चआधार सङ्ख्या पद्धतिमा रूपान्तरण गर्दा भागफलमा 0 नआएसम्म 5 ले भाग गरिरहनुपर्छ । अनि शेषलाई दायाँतर्फ लेख्दै जानुपर्छ । अन्त्यमा तलपट्टिबाट माथितिर क्रमशः शेषलाई मिलाएर लेख्नुपर्छ ।

उदाहरण 4

तलका दशमलव सङ्ख्यालाई पञ्चआधार सङ्ख्यामा रूपान्तरण गर्नुहोस् :

(क) 512 (ख) 7521

समाधान (क)

		शेष
5	512	
5	102	2
5	20	2
5	4	0
	0	4

$512 = 4022_5$

(ख)

		शेष
5	7521	
5	1504	1
5	300	4
5	60	0
5	12	0
5	2	2
	0	2

$7521 = 220041_5$

2.2.4 पञ्चआधार सङ्ख्या पद्धतिबाट दशमलव सङ्ख्या पद्धतिमा रूपान्तरण

क्रियाकलाप 10

पञ्चआधार पद्धतिको सङ्ख्या 142013_5 लाई तलको स्थानमान तालिकामा देखाइएको छ । स्थानमान तालिकाको अध्ययन गरी दिइएका प्रश्नहरूमा छलफल गर्नुहोस् ।

दशआधारमा	3125	625	125	25	5	1
पञ्चआधारमा	5^5	5^4	5^3	5^2	5^1	5^0
	1	4	2	0	1	3

(क) के 100000_5 लाई दशमलव सङ्ख्या पद्धतिमा 3125 लेख्न सकिन्छ, कसरी ?

(ख) 2013_5 लाई दशमलव सङ्ख्या पद्धतिमा कसरी लेखिन्छ ?

(ग) के दशमलव सङ्ख्या पद्धतिमा 013_5 लाई 6 लेख्न सकिन्छ, कसरी ?

(घ) 142013_5 लाई दशमलव सङ्ख्या पद्धतिमा कसरी लेखिन्छ ?

यहाँ 142013_5 लाई आधार 5 को घाताङ्कका रूपमा विस्तार गर्दा,

$1 \times 3125 + 4 \times 625 + 2 \times 125 + 0 \times 25 + 1 \times 5 + 3 \times 1$

or, $1 \times 5^5 + 4 \times 5^4 + 2 \times 5^3 + 0 \times 5^2 + 1 \times 5^1 + 3 \times 5^0$

अब दशमलव सङ्ख्या पद्धतिअनुसार लेख्दा,

$3125 + 2500 + 250 + 0 + 5 + 3 = 5883$ हुन्छ तर आधार 10 लेख्ने गरिँदैन ।

$\therefore 142013_5 = 5883$

पञ्चआधार सङ्ख्या पद्धतिलाई दशमलव सङ्ख्या पद्धतिमा रूपान्तरण गर्नका लागि आधार 5 को घाताङ्कका रूपमा विस्तारित रूपमा लेखी त्यसको सरल गर्नुपर्छ ।

उदाहरण 5

234_5 लाई दशमलव सङ्ख्या पद्धतिमा रूपान्तरण गर्नुहोस् :

समाधान

$234_5 = 2 \times 5^2 + 3 \times 5^1 + 4 \times 5^0$

$= 2 \times 25 + 3 \times 5 + 4 \times 1$

$= 50 + 15 + 4 = 69$

उदाहरण 6

तलका सङ्ख्याहरू पञ्चआधार भए द्विआधार र द्विआधार भए पञ्चआधार पद्धतिमा बदल्नुहोस्:

(क) 43_5 (ख) 10011_2

समाधान

(क)	(ख)
$43_5 = 4 \times 5^1 + 3 \times 5^0$ $= 4 \times 5 + 3 \times 1$ $= 20 + 3$ $= 23$ 23 लाई द्विआधार सङ्ख्या पद्धतिमा रूपान्तरण गर्दा, 2 | 23 2 | 11 ...1 2 | 5 ...1 2 | 2 ...1 2 | 1 ...0 0 ...1 $43_5 = 10111_2$ अतः $43_5 = 10111_2$	$10011_2 = 1 \times 2^4 + 0 \times 2^3 + 0 \times 2^2 + 1 \times 2^1 + 1 \times 2^0$ $= 1\times16 + 0 + 0 + 1 \times 2 + 1\times1$ $= 16 + 2 + 1$ $= 19$ 19 लाई पञ्चआधार सङ्ख्या पद्धतिमा रूपान्तरण गर्दा, 5 | 19 शेष 5 | 3 ... 4 0 ... 3 $19 = 34_5$ अतः $10011_2 = 34_5$

पञ्चआधार पद्धतिबाट द्विआधारमा लैजाँदा वा द्विआधारबाट पञ्चआधारमा लैजाँदा पहिले दश आधारमा रूपान्तरण गर्नुपर्छ ।

अभ्यास 2.1

1. तलका सङ्ख्यालाई विस्तारित रूपमा लेख्नुहोस् :

(क) 546 (ख) 6542 (ग) 1234

(घ) 45872 (ङ) 258963 (च) 97332

2. तलका सङ्ख्यालाई 2 र 5 को घाताङ्कका रूपमा व्यक्त गर्नुहोस् :

(क) 10 (ख) 25 (ग) 59 (घ) 402 (ङ) 805

(च) 932

3. तलका सङ्ख्या कुन सङ्ख्या पद्धतिमा छन्, लेख्नुहोस् :

(क) 10011_2 (ख) 350 (ग) 1001_2
(घ) 42_5 (ङ) 555 (च) 77532
(छ) 10010011_2 (ज) 257903 (झ) 4023_5
(ञ) 5321 (ट) 1234_5 (ठ) 101011_2

4. दिइएका दशमलव पद्धतिको सङ्ख्यालाई द्विआधार सङ्ख्या पद्धतिमा बदल्नुहोस् :

(क) 4 (ख) 9 (ग) 12 (घ) 25 (ङ) 35
(च) 79 (छ) 94 (ज) 100 (झ) 104 (ञ) 135
(ट) 190 (ठ) 22 (ड) 250 (ढ) 275 (ण) 366
(त) 512 (थ) 530 (द) 600

5. तलका प्रत्येक द्विआधार सङ्ख्यालाई दशमलव सङ्ख्या पद्धतिमा रूपान्तरण गर्नुहोस् :

(क) 11_2 (ख) 101_2 (ग) 111_2 (घ)1100_2
(ङ) 10101_2 (च) 11001_2 (छ) 10010_2 (ज) 11110_2
(झ) 100001_2 (ञ) 111111_2 (ट) 1100011_2 (ठ) 1110011_2
(ड) 1100110011_2 (ढ)1010101110_2 (ण) 100001000_2
(त) 101110111_2 (थ) 11011011001_2 (द) 1111111110_2

6. तलका प्रत्येक दशमलव पद्धतिका सङ्ख्यालाई पञ्चआधार सङ्ख्या पद्धतिमा रूपान्तरण गर्नुहोस् :

(क) 9 (ख) 13 (ग) 21 (घ) 26 (ङ) 45 (च) 55
(छ) 86 (ज) 112 (झ)194 (ञ) 404 (ट) 497 (ठ) 650
(ड) 1128 (ढ) 1234 (ण) 2125 (त) 2536 (थ) 3000 (द) 3650

7. तलका प्रत्येक पञ्चआधार सङ्ख्यालाई दशमलव सङ्ख्या पद्धतिमा रूपान्तरण गर्नुहोस् :

(क) 21_5 (ख) 24_5 (ग) 34_5 (घ) 101_5 (ङ) 123_5
(च) 300_5 (छ) 343_5 (ज) 441_5 (झ) 2023_5 (ञ) 1234_5
(ट) 2113_5 (ठ) 3313_5 (ड) 2014_5 (ढ) 4201_5 (ण) 4321_5
(त) 12304_5 (थ) 10123_5 (द) 21432_5

8. तलका सङ्ख्या पञ्चआधार भए द्विआधार र द्विआधार भए पञ्चआधार पद्धतिमा रूपान्तरण गर्नुहोस् :

(क) 40_5 (ख) 10101_2 (ग) 31_5 (घ) 101_2 (ङ) 144_5
(च) 101110_2 (छ) 23_5 (ज) 111_5 (झ) 23_5 (ञ) 10011_2
(ट) 110111_2 (ठ) 313_5

9. (क) सङ्ख्या 1101_2 र 24_5 मा कुन ठुलो छ ? साथै तिनीहरूको फरक पनि निकाल्नुहोस् ।

(ख) सङ्ख्या 110011_2 र 144_5 मा कुन ठुलो छ ? साथै तिनीहरूको फरक पनि निकाल्नुहोस् ।

परियोजना कार्य

1. आफूलाई मन पर्ने कुनै 2 ओटा पूर्ण सङ्ख्या लेख्नुहोस् । अब ती सङ्ख्यालाई द्विआधार र पञ्चआधारमा रूपान्तरण गरी कक्षाकोठामा प्रस्तुत गर्नुहोस् ।
2. तपाईंको विद्यालयको जम्मा र कक्षा 8 को विद्यार्थी सङ्ख्या लेख्नुहोस् र ती सङ्ख्यालाई द्विआधार र पञ्चआधारमा रूपान्तरण गरी कक्षाकोठामा प्रस्तुत गर्नुहोस् ।

उत्तर

1. (क) $5 \times 10^2 + 4 \times 10^1 + 6 \times 10^0$ (ख) $6 \times 10^3 + 5 \times 10^2 + 4 \times 10^1 + 2 \times 10^0$
(ग) $1\times10^3 + 2\times10^2 + 3\times10^1 + 4 \times 10^0$
(घ) $4\times10^4 + 5\times10^3 + 8 \times 10^2 + 7 \times 10^1 + 2 \times 10^0$
(ङ) $2\times 10^5 + 5\times 10^4 + 8 \times 10^3 + 9 \times 10^2 + 6 \times 10^1 + 3 \times 10^0$
(च) $9 \times 10^4 + 7 \times 10^3 + 3 \times 10^2 + 3 \times 10^1 + 2 \times 10^0$

2. (क) $1 \times 2^3 + 0 \times 2^2 + 1 \times 2^1 + 0 \times 2^0$; $2 \times 5^1 + 0 \times 5^0$
(ख) $1 \times 2^4 + 1 \times 2^3 + 0 \times 2^2 + 0 \times 2^1 + 1 \times 2^0$; $1 \times 5^2 + 0 \times 5^1 + 0 \times 5^0$
(ग) $1 \times 2^5 + 1 \times 2^4 + 1 \times 2^3 + 0 \times 2^2 + 1 \times 2^1 + 1 \times 2^0$; $2 \times 5^2 + 1 \times 5^1 + 4 \times 5^0$
(घ) $1\times2^8 + 1\times2^7 + 0 \times 2^6 + 0 \times 2^5 + 1 \times 2^4 + 0 \times 2^3 + 0 \times 2^2 + 1 \times 2^1 + 0 \times 2^0$; $3 \times 5^3 + 1 \times 5^2 + 0 \times 5^1 + 2 \times 5^0$
(ङ) $1 \times 2^9 + 1 \times 2^8 + 0 \times 2^7 + 0 \times 2^6 + 1 \times 2^5 + 0 \times 2^4 + 0 \times 2^3 + 1 \times 2^2 + 0 \times 2^1 + 1 \times 2^0$; $1 \times 5^4 + 1 \times 5^3 + 2 \times 5^2 + 1 \times 5^1 + 0 \times 5^0$
(च) $1 \times 2^9 + 1 \times 2^8 + 1 \times 2^7 + 0 \times 2^6 + 1 \times 2^5 + 0 \times 2^4 + 0 \times 2^3 + 1 \times 2^2 + 0 \times 2^1 + 0 \times 2^0$; $1\times5^4 + 2 \times 5^3 + 2 \times 5^2 + 1 \times 5^1 + 2 \times 5^0$

3. (क) द्विआधार (ख) दशमलव (ग) द्विआधार (घ) पञ्चआधार (ङ) दशमलव
(च) दशमलव (छ) द्विआधार (ज) दशमलव (झ) पञ्चआधार (ञ) दशमलव
(ट) पञ्चआधार (ठ) द्विआधार

4. (क) 100_2 (ख) 1001_2 (ग) 1100_2 (घ) 11001_2 (ङ) 100011_2
(च) 1001111_2 (छ) 1011110_2 (ज) 1100100_2 (झ) 1101000_2 (ञ) 10000111_2
(ट) 10111110_2 (ठ) 11011100_2 (ड) 11111010_2 (ढ) 100010011_2

(ण) 1011011102 (त) 10000000002 (थ) 10000100102

(द) 10010110002

5. (क) 3 (ख) 5 (ग) 7 (घ) 12 (ङ) 21 (च) 25

(छ) 18 (ज) 30 (झ) 33 (ञ) 63 (ट) 99 (ठ) 115

(ड) 819 (ढ) 686 (ण) 264 (त) 375 (थ) 1753 (द) 1022

6. (क) 145 (ख) 235 (ग) 415 (घ) 1015 (ङ) 1405 (च) 2105

(छ) 3215 (ज) 4225 (झ) 12345 (ञ) 31045 (ट) 34425 (ठ) 101005

(ड) 140035 (ढ) 144145 (ण) 320005 (त) 401215 (थ) 440005

(द) 1041005

7. (क) 11 (ख) 14 (ग) 19 (घ) 26 (ङ) 38 (च) 75

(छ) 98 (ज) 121 (झ) 263 (ञ) 194 (ट) 283 (ठ) 458

(ड) 259 (ढ) 551 (ण) 586 (त) 954 (थ) 663 (द) 1492

पाठ 3

आनुपातिक र अनानुपातिक सङ्ख्याहरू (Rational and Irrational Numbers)

3.0 पुनरवलोकन (Review)

समूहमा बसी तल सोधिएका प्रश्नको समाधान गर्नुहोस् :

(अ) कस्तो सङ्ख्यालाई आनुपातिक सङ्ख्या भनिन्छ ? तल दिइएका सङ्ख्याहरू कुन कुन आनुपातिक सङ्ख्या हुन् कारणसहित लेख्नुहोस् ।

(क) सामान्य नेपालीको उचाइ $\frac{21}{4}$ फिट हुन्छ ।

(ख) समुद्री सतहमा पानी 0°c तापक्रममा जम्छ ।

(ग) एक जना धावक एक मिनेटमा 200 m का दरले दौडिन्छ ।

(घ) $\frac{-4}{7}$ (ङ) –1 (च) $\frac{4}{5}$

(आ) दिइएका भिन्नहरूलाई दशमलवमा रूपान्तरण गर्दा अन्त्य हुने दशमलव वा अन्त्यहीन पुनरावृत्त दशमलवहरू कस्तो हुन्छन्, छुट्याउनुहोस् :

(क) $\frac{4}{5}$ (ख) $\frac{5}{3}$ (ग) $\frac{4}{7}$ (घ) $\frac{7}{2}$ (ङ) $\frac{5}{9}$

(इ) दिइएका दशमलवहरूलाई भिन्नमा रूपान्तरण गर्नुहोस् :

(क) 0.75 (ख) 0.05 (ग) $0.\overline{3}$ (घ) $0.\overline{65}$ (ङ) $0.\overline{285714}$

माथि प्रश्न (इ) मा दिइएका दशमलवहरू आनुपातिक सङ्ख्या हुन वा होइनन् छुट्याउनुहोस् ।

3.1 अनानुपातिक सङ्ख्या (Irrational Number)

क्रियाकलाप 1

(अ) तलका अवस्थामा मान पत्ता लगाई आनुपातिक सङ्ख्या हुन् वा होइनन् छुट्याउनुहोस् :

(क) 4 को वर्गमूल (ख) $\frac{4}{9}$ को वर्गमूल (ग) 0.25

(घ) 4.6666 (ङ) 2 को वर्गमूल (च) π

माथि दिइएको अवस्थामा,

(क) 4 को वर्गमूल 2 हुन्छ । 2 लाई $\frac{a}{b}$ को स्वरूपमा लेख्न सकिन्छ, जस्तैः $\frac{2}{1}, \frac{4}{2}, \frac{6}{3}, \ldots$ लेख्न सकिन्छ । त्यसैले 4 को वर्गमूल 2 आनुपातिक सङ्ख्या हो ।

(ख) $\frac{4}{9}$ को वगर्मूल $\frac{2}{3}$ हुन्छ । $\frac{2}{3}$ लाई $\frac{a}{b}$ को स्वरूपमा लेख्न सकिने भएकाले $\frac{4}{9}$ को वगर्मूल $\frac{2}{3}$ आनुपातिक सङ्ख्या हो ।

(ग) 0.25 अन्त्य हुने दशमलव सङ्ख्या (Terminating decimal number) हो । यसलाई भिन्नमा $\frac{25}{100}$ लेखिन्छ । $\frac{25}{100}$ लाई $\frac{a}{b}$ को स्वरूपमा लेख्न सकिने भएकाले 0.25 आनुपातिक सङ्ख्या हो ।

(घ) 4.66 ... अन्त्यहीन पुनरावृत्त दशमलव सङ्ख्या (Non terminating recurring decimal number) हो ।
4.66 ... = $\frac{42}{9}$ हुन्छ । 4.66 ... = $\frac{42}{9}$ लाई $\frac{a}{b}$ को स्वरूपमा लेख्न सकिने भएकाले 4.66 ... आनुपातिक सङ्ख्या हो ।

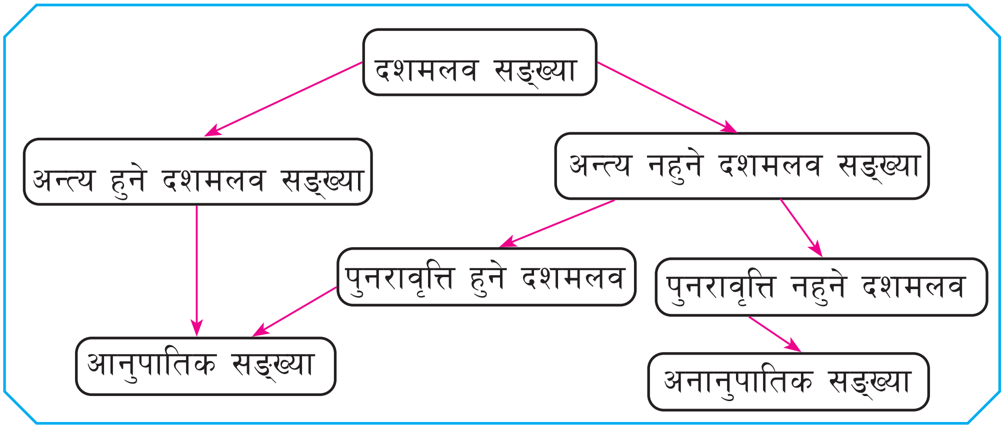
(ङ) 2 को वगर्मूल 1.4421... हुन्छ । 1.4421... अन्त्यहीन पुनरावृत्त नहुने दशमलव सङ्ख्या (Non terminating and non recurring decimal number) हो । यसलाई भिन्नमा रूपान्तरण गर्न सकिँदैन । त्यसैले यसलाई $\frac{a}{b}$ को रुपमा लेख्न सकिँदैन । तसर्थ 2 को वगर्मूल 1.4421... आनुपातिक सङ्ख्या होइन ।

(च) π को मान 3.1415926 ... हुन्छ । 3.1415926 ... अन्त्यहीन पुनरावृत्त नहुने दशमलव सङ्ख्या (Non terminating and non recurring decimal number) हो । यसलाई भिन्नमा रूपान्तरण गर्न सकिएन । त्यसैले यसलाई $\frac{a}{b}$ को रूपमा लेख्न सकिँदैन । तसर्थ π को मान 3.1415926... आनुपातिक सङ्ख्या भएन ।

यदि a र b पूर्णाङ्क हुन् जहाँ, $b \neq 0$ छ भने $\frac{a}{b}$ को रूपमा व्यक्त गर्न सकिने सङ्ख्यालाई आनुपातिक सङ्ख्या (Rational Number) भनिन्छ, जस्तै : 2, 5, –7, $\frac{5}{8}$, 2.13, $1.\overline{6}$ आदि आनुपातिक सङ्ख्याहरू हुन् । $\frac{a}{b}$ को रूपमा व्यक्त गर्न नसकिने सङ्ख्यालाई अनानुपातिक सङ्ख्या भनिन्छ । अर्थात् आनुपातिक सङ्ख्यामा नपर्ने सङ्ख्यालाई अनानुपातिक सङ्ख्या भनिन्छ । अन्त्य हुने र अन्त्यहीन पुनरावृत्त दशमलव सङ्ख्यालाई भिन्नमा रूपान्तरण गर्न सकिने भएकाले तिनीहरू आनुपातिक सङ्ख्या हुन् भने अन्त्यहीन पुनरावृत्त नहुने दशमलव सङ्ख्यालाई भिन्नमा रूपान्तरण गर्न सकिँदैन । यस्ता सङ्ख्यालाई अनानुपातिक सङ्ख्या भनिन्छ ।

जस्तै : $\sqrt{2}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt[3]{10}$, $\sqrt{\frac{1}{3}}$, $\sqrt{7}$, 2.134…, π आदि अनानुपातिक सङ्ख्याहरू हुन् ।

दशमलव सङ्ख्यालाई निम्नानुसार तालिका (Chart) बाट देखाउन सकिन्छ :



विचारणीय प्रश्न : $\frac{22}{7}$ आनुपातिक सङ्ख्या हो । π अनानुपातिक सङ्ख्या हो । तर हामी $\pi = \frac{22}{7}$ मानेर समस्या समाधान गर्छौं किन होला ?

क्रियाकलाप 2

हामीले यसभन्दा अगाडि प्राकृतिक सङ्ख्या, पूर्ण सङ्ख्या, पूर्णाङ्क, आनुपातिक सङ्ख्या र अनानुपातिक सङ्ख्याहरूको बारेमा अध्ययन गरिसक्यौँ। यी सबै सङ्ख्याहरूको सम्बन्ध कस्तो हुन्छ होला ? यिनीहरूलाई चार्टमा देखाउँदा कस्तो देखिन्छ होला ? यी सबै सङ्ख्याहरूको संयोजनलाई के भनिन्छ होला ? छलफल गरी चार्टमा देखाउनुहोस् ।

गन्तीका सङ्ख्यालाई प्राकृतिक सङ्ख्या भनिन्छ । N = {1, 2, 3, ...}

गन्तीका सङ्ख्याहरूका समूहमा शून्य थपिएपछि पूर्ण सङ्ख्याको समूह हुन्छ । W = {0, 1, 2, 3, ...}

पूर्ण सङ्ख्यामा यसका ऋणात्मक सङ्ख्या मिसाएपश्चात् पूर्णाङ्क हुन्छ ।

Z = {..., –3, –2, –1, 0, 1, 2, 3, ...}

पूर्णाङ्क र भिन्नहरूको संयोजनबाट आनुपातिक सङ्ख्या बन्छ । दशमलव सङ्ख्या अन्त्य हुने, अन्त्यहीन पुनरावृत्त दशमलव र अन्त्यहीन पुनरावृत्त नहुने दशमलव सङ्ख्या गरी तीन प्रकारका हुन्छन् । अन्त्य हुने र अन्त्यहीन पुनरावृत्त दशमलव सङ्ख्यालाई भिन्नमा रूपान्तरण गर्न सकिने भएकाले तिनीहरू आनुपातिक सङ्ख्या हुन् ।

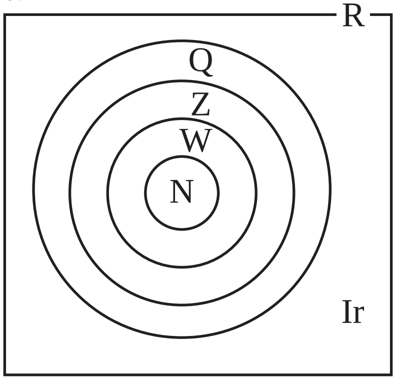
$\frac{4}{7}$, 1, 0, –1, 0.75, $0.\overline{3}$ आनुपातिक सङ्ख्याहरू हुन् ।

अन्त्यहीन पुनरावृत्त नहुने दशमलव सङ्ख्यालाई भिन्नमा रूपान्तरण गर्न सकिँदैन । यस्ता सङ्ख्या अनानुपातिक सङ्ख्या हुन् । आनुपातिक सङ्ख्याहरूको समूह (Q) र अनानुपातिक सङ्ख्याहरूको समूह (Ir) को मिलेर बनेको समूहलाई वास्तविक सङ्ख्याको समूह भनिन्छ । यसलाई R ले जनाइन्छ । जहाँ Q र Ir अलगिएका समूह हुन् ।

वास्तविक सङ्ख्यालाई सङ्ख्या रेखामा प्रस्तुत गर्न सकिन्छ । यी सबै सङ्ख्याको सम्बन्धलाई समूह सङ्केतमा

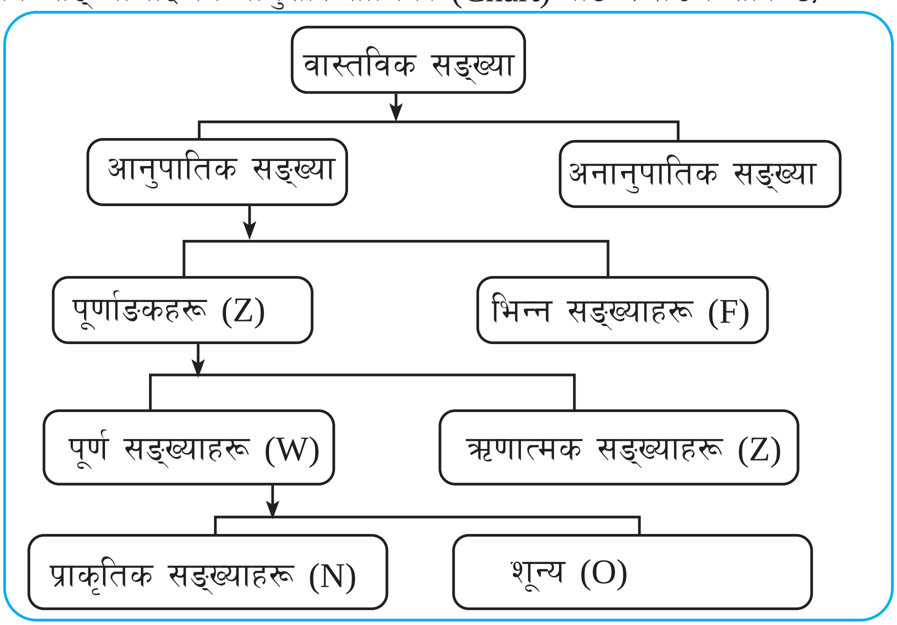
$N \subseteq W \subseteq Z \subseteq Q \subseteq R$, $Ir \subseteq R$ लेखिन्छ ।

वास्तविक सङ्ख्याहरूको समूहलाई भेनचित्रमा निम्नानुसार देखाउन सकिन्छ :



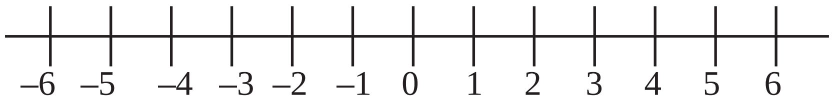
यहाँ, $N \subseteq W \subseteq Z \subseteq Q \subseteq R$, $Ir \subseteq R$ हुन्छ ।

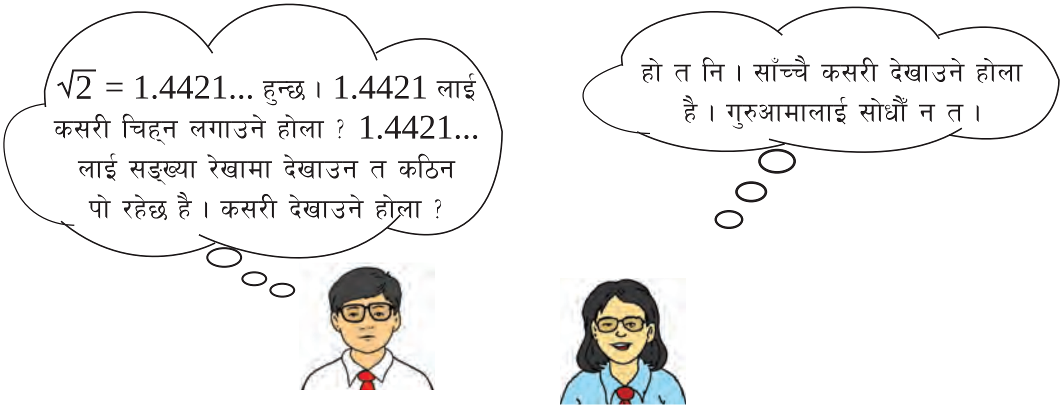
वास्तविक सङ्ख्यालाई निम्नानुसार तालिका (Chart) बाट देखाउन सकिन्छ :



क्रियाकलाप 3

पूर्णाङ्कहरूलाई सङ्ख्या रेखामा देखाउन सक्छौँ तर $\sqrt{2}$ लाई सङ्ख्या रेखामा कसरी देखाउने होला ?





गुरुआमा, $\sqrt{2}$ लाई सङ्ख्या रेखामा कसरी देखाउन सकिन्छ ?

गुरुआमा : $\sqrt{2}$ = 1.4421... हुन्छ । 1.4421 लाई सङ्ख्या रेखामा देखाउन कहाँनिर चिह्न लगाउने कठिन भयो है ।

विद्यार्थी : हो, गुरुआमा ।

गुरुआमा : तपाईंहरूलाई पाइथागोरस साध्य त थाहा छ होला । पाइथागोरस साध्यअनुसार समकोण त्रिभुजमा

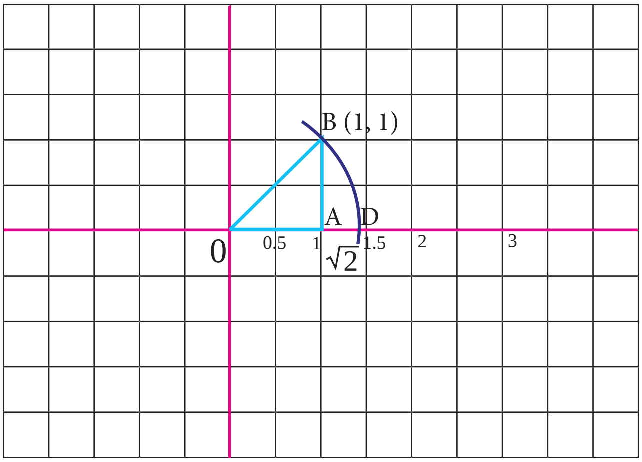
$p^2 + b^2 = h^2$ हुन्छ । यदि $p = 1$ र $b = 1$ भयो भने h को मान कति हुन्छ, गणना गर्नुहोस् त ?

विद्यार्थी : गुरुआमा $\sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$ हुन्छ ।

गुरुआमा : हो । $\sqrt{2}$ को लम्बाइ बराबरको अर्धव्यास लिएर पेन्सिल कम्पासले सङ्ख्या रेखामा उद्गम बिन्दुबाट काटेर चिह्न लगाऔँ ।

विद्यार्थी : कसरी गर्ने गुरुआमा ?

गुरुआमा : ग्राफपेपरमा सङ्ख्या रेखा खिचौँ । चित्रमा देखाए जस्तै गरी समकोण त्रिभुज OAB खिचौँ । OB को नाप $\sqrt{2}$ हुन्छ । अब OB बराबरको अर्धव्यास लिएर उद्गम बिन्दुबाट XX' मा काटेर D नाम दिऔँ । यहाँ OB = OD हुन्छ । तसर्थ OD = $\sqrt{2}$ हुन्छ ।



उदाहरण 1

दिइएका सङ्ख्याहरू आनुपातिक वा अनानुपातिक के हुन् ? छुट्याउनुहोस् र कारण पनि दिनुहोस् :

(क) $\frac{-5}{2}$ (ख) $\sqrt{7}$ (ग) $4.\overline{58}$ (घ) 1.758621357 …

समाधान

(क) $\frac{-5}{2}$ आनुपातिक सङ्ख्या हो किनभने अंश र हर दुवै पूर्णाङ्क हुन् । त्यस्तै हर शून्य छैन ।

(ख) $\sqrt{7}$ = 2.645751 ... हुन्छ । 2.645751 ... अनानुपातिक सङ्ख्या हो किन भने यो अन्त्यहीन पुनरावृत्ति नहुने दशमलव सङ्ख्या हो ।

(ग) $4.\overline{58}$ आनुपातिक सङ्ख्या हो किनभने यो अन्त्यहीन पुनरावृत्ति हुने दशमलव सङ्ख्या हो ।

(घ) 1.758621357 … अनानुपातिक सङ्ख्या हो किनभने यो अन्त्यहीन पुनरावृत्ति नहुने दशमलव सङ्ख्या हो ।

उदाहरण 2

तलका दशमलवलाई भिन्नमा रूपान्तरण गर्नुहोस् :

(क) $0.\overline{3}$ (ख) $0.\overline{41}$

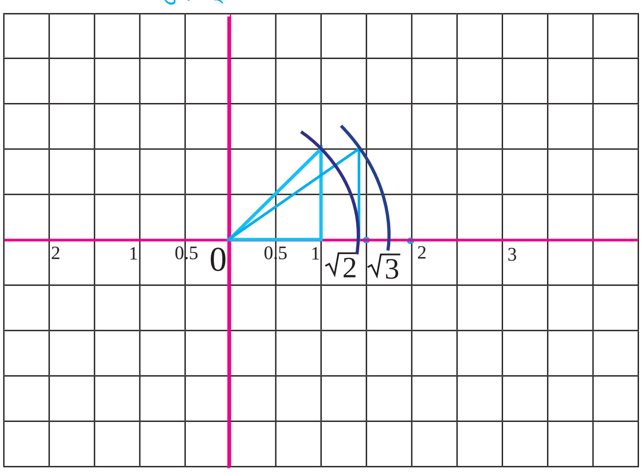
समाधान

(क) $0.\overline{3}$	ख) $0.\overline{41}$
मानौँ, $x = 0.\overline{3}$	मानौँ, $x = 0.\overline{41}$
$\therefore x = 0.333....$ (i)	$\therefore x = 0.4141....$ (i)
यहाँ एउटा मात्र अङ्क दोहोरिने भएकाले	यहाँ दुईओटा अङ्कहरू दोहोरिने भएकाले
समीकरण (i) लाई 10 ले गुणन गर्दा,	समीकरण (i) लाई 100 ले गुणन गर्दा,
$10x = 3.33...$ (ii)	$100x = 41.4141...$ (ii)
अब, (ii) बाट (i) घटाउँदा,	अब, (ii) बाट (i) घटाउँदा,
$10x - x = 3.33... - 0.33...$	$100x - x = 41.4141... - 0.4141...$
or, $9x = 3$	or, $99x = 41$
or, $x = \frac{9}{3} = \frac{1}{3}$	or, $x = \frac{41}{99}$
$\therefore 0.\overline{3} = \frac{1}{3}$	$\therefore 0.\overline{41} = \frac{41}{99}$

उदाहरण 3

$\sqrt{3}$ लाई सङ्ख्या रेखामा देखाउनुहोस् :

समाधान



यहाँ, 1 एकाइ आधार र 1 एकाइ लम्ब भएको समकोण त्रिभुजमा कर्णको लम्बाइ $\sqrt{2}$ एकाइ हुन्छ । फेरि $\sqrt{2}$ एकाइ आधार र 1 एकाइ लम्ब भएको समकोण त्रिभुजमा कर्णको लम्बाइ $\sqrt{3}$ एकाइ हुन्छ । तसर्थ $\sqrt{3}$ को लम्बाइ बराबरको अर्धव्यास लिएर पेन्सिल कम्पासले सङ्ख्या रेखामा उद्गम बिन्दुबाट काटेर चिह्न लगाउनुपर्छ ।

अभ्यास 3.1

1. तलका तथ्यहरू ठिक भए ($\surd$) र बेठिक भए ($\times$) चिह्न लेख्नुहोस् ।

(क) वास्तविक सङ्ख्याको समूहमा आनुपातिक सङ्ख्या र अनानुपातिक सङ्ख्याहरू सबै पर्दछन् ।

(ख) आनुपातिक सङ्ख्याहरूको समूह र अनानुपातिक सङ्ख्याको समूह अलग्गिएका समूहहरू हुन् ।

(ग) पूर्ण सङ्ख्याको समूह र पूर्णाङ्कको समूह एउटै हो ।

(घ) $Z \subset Q \subset R$

(ङ) $\sqrt{4}$ अनानुपातिक सङ्ख्या हो ।

(च) $Z \supset N \supset W$

(छ) सबै आनुपातिक सङ्ख्या वास्तविक सङ्ख्या हुन् ।

2. दिइएका सङ्ख्या आनुपातिक सङ्ख्या वा अनानुपातिक सङ्ख्या के हुन्, छुट्याउनुहोस् र किन ?

(क) $\frac{3}{4}$ (ख) $\sqrt{2}$ (ग) $\sqrt{5}$ (घ) $\frac{2}{5}$ (ङ) $\frac{10}{20}$

(च) 3.57 (छ) 3.5982... (ज) –15 (झ) 0.735....

(ञ) $-\sqrt{169}$ (ट) $\sqrt{3}$ (ठ) $\sqrt{26}$ (ड) $2.\overline{5}$

(ढ) $\frac{35}{9}$ (ण) $\sqrt[3]{9}$

3. तलका दशमलव सङ्ख्यालाई भिन्नमा रूपान्तरण गर्नुहोस् :

(क) $0.\overline{5}$ (ख) $0.\overline{7}$ (ग) $0.\overline{24}$ (घ) $0.\overline{132}$ (ङ) $0.\overline{27}$

(च) $1.\overline{57}$ (छ) $0.\overline{365}$ (ज) $4.\overline{78}$ (झ) $0.\overline{445}$ (ञ) $1.\overline{525}$

4. दिइएको सङ्ख्यालाई सङ्ख्या रेखामा देखाउनुहोस् :

(क) $\sqrt{5}$ (ख) $\sqrt{6}$ (ग) $\sqrt{7}$ (घ) $\sqrt{8}$

5. आनुपातिक र अनानुपातिक सङ्ख्यालाई उदाहरणसहित परिभाषित गर्नुहोस् ।

6. **आनुपातिक सङ्ख्या र अनानुपातिक सङ्ख्याको सम्बन्धलाई भेनचित्रमा देखाउनुहोस् ।**

7. **आनुपातिक सङ्ख्या र अनानुपातिक सङ्ख्याको दुईओटा फरक लेख्नुहोस् ।**

परियोजना कार्य

1. चार्टपेपरमा 2 cm बराबरको एक एकाइ हुने गरी वर्गाङ्कित कागजको ढाँचा बनाई $\sqrt{2}$ र $\sqrt{3}$ लाई सङ्ख्या रेखामा अङ्कित गरी कक्षाकोठामा प्रस्तुत गर्नुहोस् ।
2. कुनै 5 ओटा आनुपातिक सङ्ख्या लिई दशमलवमा लैजानुहोस् । ती सङ्ख्या अन्त्य हुने वा पुनरावृत्ति हुने अन्त्यहीन दशमलव सङ्ख्या के हुन् छुट्याउनुहोस् ।

उत्तर

1. (क) ठिक (ख) ठिक (ग) बेठिक (घ) ठिक (ङ) बेठिक (च) बेठिक
2. आनुपातिक सङ्ख्या : (क), (घ), (ङ), (च), (ज), (ञ), (ड), (ढ)
   अनानुपातिक सङ्ख्या : (ख), (ग), (छ), (झ), (ट), (ठ), (ण)
3. (क) $\frac{5}{9}$ (ख) $\frac{7}{9}$ (ग) $\frac{24}{99}$ (घ) $\frac{132}{999}$ (ङ) $\frac{27}{99}$ (च) $\frac{157}{99}$ (छ) $\frac{365}{999}$
   (ज) $\frac{474}{99}$ (झ) $\frac{445}{999}$ (ञ) $\frac{1524}{999}$

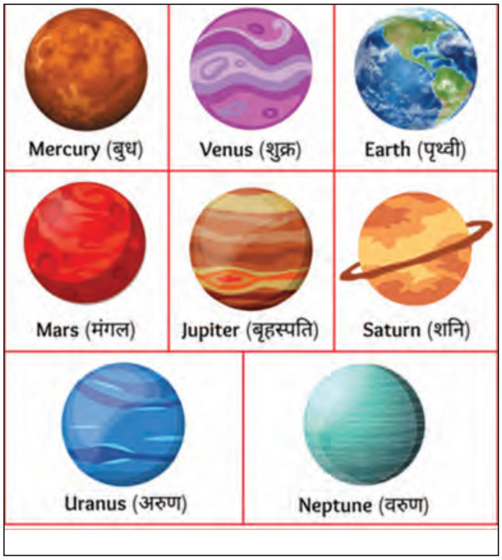
4 देखि 7 सम्म शिक्षकलाई देखाउनुहोस् ।

3.2 सङ्ख्याको वैज्ञानिक सङ्केत (Scientific Notation of Numbers)

क्रियाकलाप 4

तल तालिकामा ग्रहहरू र सूर्यबाट यसको दुरी दिइएको छ । उक्त तालिका अध्ययन गरी यसलाई कसरी पढ्ने होला ? यसलाई छोटकरीमा पनि लेख्न सकिन्छ कि ? सकिन्छ भने कसरी लेख्ने होला ? समूहमा छलफल गर्नुहोस् :

सूर्यबाट सबैभन्दा नजिक बुध ग्रह छ । सूर्यबाट यसको दुरी 57910000 km छ । राष्ट्रिय पद्धतिअनुसार पाँच करोड उनासी लाख दश हजार किलोमिटर र अन्तर्राष्ट्रिय



Average Distance of the Planets from the Sun

Planet	Average Distance (Km)
Mercury	57,910,000
Venus	108,210,000
Earth	149,600,000
Mars	227,920,000
Jupiter	778,570,000
Saturn	1,433,530,000
Uranus	2,872,460,000
Neptune	4,495,060,000

पद्धति अनुसार Fifty seven million nine hundred ten thousand kilometre हुन्छ । सूर्यबाट सबैभन्दा टाढाको ग्रह वरुण हो । सूर्यबाट यसको दुरी 4495060000 km छ । राष्ट्रिय पद्धतिअनुसार चार अरब उनन्चास करोड पचास लाख साठी हजार किलोमिटर र अन्तर्राष्ट्रिय पद्धति अनुसार Four billion four hundred ninety five million sixty thousand kilometre हुन्छ । सूर्यबाट पृथ्वीसम्मको दुरी 149600000 km छ । राष्ट्रिय पद्धतिअनुसार चौध करोड छयानब्बे लाख किलोमिटर र अन्तर्राष्ट्रिय पद्धतिअनुसार One hundred forty nine million six hundred thousand kilometre हुन्छ ।

सूर्यबाट ग्रहहरूसम्मको दुरीलाई यसरी पनि लेख्न सकिन्छ, जस्तै:

सूर्यबाट बुधसम्मको दुरी $= 57,910,000$ km $= 5.791 \times 10^7$ km

सूर्यबाट वरुणसम्मको दुरी $= 4,495,060,000$ km $= 4.49506 \times 10^9$ km

अब सूर्यबाट अरू बाँकी ग्रहसम्मको दुरीलाई पनि माथिको जस्तै छोटकरीमा लेख्नुहोस् ।

क्रियाकलाप 5

पृथ्वीको तौल र हाइड्रोजन परमाणुको तौल तल दिइएको छ । उक्त तौललाई माथिको जस्तै गरी 10 को घाताङ्कका रूपमा कसरी लेख्ने होला ? समूहमा छलफल गर्नुहोस् ।

(क) पृथ्वीको तौल $= 5,972,000,000,000,000,000,000,000$ kg

(ख) हाइड्रोजन परमाणुको तौल $= 0.000,000,000,000,000,000,000,000,001,673$ kg

यहाँ, (क) पृथ्वीको तौल = 5,972,000,000,000,000,000,000,000 kg

$= 5.972 \times 1{,}000{,}000{,}000{,}000{,}000{,}000{,}000{,}000$ kg

$= 5.972 \times 10^{24}$ kg

(ख) हाइड्रोजन परमाणुको तौल = 0.000,000,000,000,000,000,000,000,001,673 kg

$$= \frac{1673}{1{,}000{,}000{,}000{,}000{,}000{,}000{,}000{,}000{,}000{,}000}$$

$$= \frac{1.673 \times 10^{3}}{10^{30}}$$

$= 1.673 \times 10^{3-30}$

$= 1.673 \times 10^{-27}$ kg

कुनै सङ्ख्यालाई दशमलवभन्दा अगाडि एउटा मात्र अङ्क भएको सङ्ख्या र 10 को घाताङ्कको गुणनको रूपमा व्यक्त गरिन्छ भने उक्त सङ्केत वा विधिलाई वैज्ञानिक सङ्केत भनिन्छ । धेरै ठुला र धेरै साना सङ्ख्यालाई व्यक्त गर्नका लागि वैज्ञानिक सङ्केतको प्रयोग गरिन्छ ।

जस्तै : $1673 = 1.673 \times 1000 = 1.673 \times 10^{3}$

$$= \frac{157}{100000} = \frac{1.57 \times 10^{2}}{10^{5}} = 1.57 \times 10^{2-5} = 1.57 \times 10^{-3}$$

उदाहरण 1

तलका सङ्ख्यालाई वैज्ञानिक सङ्केतमा लेख्नुहोस् :

(क) 759 (ख) 39000 (ग) 0.00037 (घ) 123.54 (ङ) 0.000213

समाधान

(क) $759 = 7.59 \times 100 = 7.59 \times 10^{2}$

(ख) $39000 = 3.9 \times 10000 = 3.9 \times 10^{4}$

(ग) $0.00037 = \frac{37}{100000} = \frac{3.7 \times 10}{100000} = \frac{3.7 \times 10^{1}}{10^{5}}$

$= 3.7 \times 10^{1-5}$ $[\because \frac{x^m}{x^n} = x^{m-n}]$

$= 3.7 \times 10^{-4}$

(घ) $123.54 = \frac{12354}{100} = \frac{1.2354 \times 10^4}{10^2}$

$= 1.2354 \times 10^{4-2}$ $[\because \frac{x^m}{x^n} = x^{m-n}]$

$= 1.2354 \times 10^2$

(ङ) $0.000213 = \frac{213}{1000000} = \frac{2.13 \times 10^2}{10^6}$

$= 2.13 \times 10^{2-6}$ $[\because \frac{x^m}{x^n} = x^{m-n}]$

$= 2.13 \times 10^{-4}$

उदाहरण 2

तलका वैज्ञानिक सङ्केतहरूलाई दशमलव पद्धतिमा लेख्नुहोस् :

(क) 6.3×10^3 (ख) 4.579×10^6

(ग) 7.4×10^{-5} (घ) 3.579×10^{-4}

समाधान

(क) $6.3 \times 10^3 = 6.3 \times 1000$

$= 6300.0$

$= 6300$

> समाधान गर्दा पहिला 10 को घाताङ्कलाई विस्तारित रूपमा लेख्ने, जस्तैः $10^3 = 1000$, त्यसपछि गुणन गर्ने ।

(ख) $4.579 \times 10^6 = 4.579 \times 1000000$

$= 4579000.000$

$= 4579000$

(ग) $7.4 \times 10^{-5} = \frac{7.4}{10^5}$

$= \frac{7.4}{1000000}$

$= 0.000074$

ऋणात्मक चिह्न भएको घाताङ्कलाई हरमा लैजाने र 10 को घाताङ्कलाई विस्तारित रूपमा लेख्ने ।

त्यसपछि सङ्ख्याको अगाडि हरमा भएको शून्य बराबरको शून्य थपी दशमलव चिह्नलाई अगाडि बढाउने ।

(घ) $3.579 \times 10^{-4} = \frac{3.579}{10^4}$

$= \frac{3.579}{100000}$

$= 0.0003579$

अभ्यास 3.2

1. तलका दशमलव सङ्ख्यालाई वैज्ञानिक सङ्केतमा लेख्नुहोस् :

(क) 45 (ख) 3400 (ग) 0.000023 (घ) 101000

(ङ) 0.010 (च) 45.01 (छ) 7000000 (ज) 0.00671

(झ) 625.6 (ञ) 0.07882 (ट) 118000 (ठ) 87200

(ड) 0.00000272 (ढ) 0.000037 (ण) 74171.7 (त) 3456.78

2. तलका वैज्ञानिक सङ्केतहरूलाई दशमलव सङ्ख्यामा रूपान्तरण गर्नुहोस् :

(क) 2.30×10^4 (ख) 5.40×10^1 (ग) 1.76×10^0

(घ) 1.76×10^{-3} (ङ) 7.4×10^{-5} (च) 1.901×10^{-7}

(छ) 1.525×10^6 (ज) 6.58157×10^7 (झ) 5.256×10^8

(ञ) 5.23×10^{-7} (ट) 8.71×10^{-8} (ठ) 7.75763×10^{-9}

3. एउटा सामानसहितको ट्रकको तौल 12,000 kg छ भने उक्त तौललाई वैज्ञानिक सङ्केतमा लेख्नुहोस् ।

4. आर्गनको परमाणुको अर्धव्यास 0.000,000,000,098 मिटर भए यसलाई वैज्ञानिक सङ्केत लेख्नुहोस् ।

5. 3×10^8 m/s ले प्रकाशको हावामा गति जनाउँछ भने त्यसको दशमलव मान कति हुन्छ ?

6. 30 दिन भएको महिनामा 6480000 सेकेन्ड हुन्छ भने यसको वैज्ञानिक सङ्केत कति हुन्छ ?

7. नेपाल आयल निगम, काठमाडौँमा 1.87×10^6 लिटर पेट्रोल भण्डारण रहेको छ भने कति किलोलिटर रहेछ ?

8. प्रकाशको गति करिब 3,00,000 फरक छ भने यसलाई वैज्ञानिक सङ्केत लेख्नुहोस् ।

परियोजना कार्य

हामी बस्ने गरेको पृथ्वीदेखि मङ्गल, बुध र शुक्र ग्रहका दुरी कति कति होला ? विभिन्न पुस्तक वा वेबसाइटको सहायताले पत्ता लगाउनुहोस् । त्यसलाई वैज्ञानिक सङ्केतमा लेखी कक्षाकोठामा प्रस्तुत गर्नुहोस् ।

उत्तर

1. (क) 4.5×10^1 (ख) 3.4×10^3 (ग) 2.3×10^{-5}
   (घ) 1.01×10^5 (ङ) 1.0×10^1 (च)4.501×10^1
   (छ) 7.0×10^6 (ज) 6.71×10^{-3} (झ) 6.256×102
   (ञ) 7.882×10^{-2} (ट) 1.18×10^5 (ठ) 8.72×10^4
   (ड) 2.72×10^{-6} (ढ) 3.7×10^{-5} (ण) 7.41717×10^4
   (त) 3.45678×10^3
2. (क) 23000 (ख) 54 (ग) 1.76
   (घ) 0.00176 (ङ) 0.000074 (च) 0.0000001901
   (छ) 1525000 (ज) 65815700 (झ) 525600000
   (ञ) 0.000000523 (ट) 0.0000000871
   (ठ) 0.00000000775763
3. 1.2×10^4 4. 9.8×10^{-11} 5. 300000000 m/s
6. 6.48×10^6 7. 1870000 8. 3×10^5

3.3 वैज्ञानिक सङ्केतमा लेखिएका सङ्ख्याहरूको सरलीकरण (Simplification of Numbers with Scientific Notations)

क्रियाकलाप 6

समूहमा छलफल गरी तलका प्रश्नको सरल गर्नुहोस् :

(क) खानेपानी बोक्ने एउटा ट्याङ्करले 1.2×10^4 लिटर र अर्को ट्याङ्करले 7.0×10^3 लिटर पानी बोक्छन् । दुवै ट्याङ्करले बोकेको पानी अट्ने एउटा खाली ट्याङ्कीमा दुवै ट्याङ्करले पानी खन्याए भने उक्त ट्याङ्कीमा कति लिटर पानी हुन्छ ? वैज्ञानिक सङ्केतमा लेख्नुहोस् ।

(ख) एउटा पोखरीमा 1.8×10^8 लिटर पानी छ । यदि 1.6×10^5 लिटर पानी खोलेर पठाइयो भने पोखरीमा कति पानी बाँकी छ ? वैज्ञानिक सङ्केतमा लेख्नुहोस् ।

(ग) लखनको एउटा माछा पोखरीमा 1.8×10^8 लिटर पानी छ । उनका 15 ओटा माछा पोखरी छन् । यदि सबै पोखरीमा बराबर मात्रामा पानी हुने हो भने जम्मा कति लिटर पानी हुन्छ ? वैज्ञानिक सङ्केतमा लेख्नुहोस् ।

उदाहरण 1

सरल गर्नुहोस् :

(क) $3.4 \times 10^2 + 4.57 \times 10^3$

(ख) $4.54 \times 10^{-3} - 2.4 \times 10^{-3}$

(ग) $(2.00 \times 10^3) \times (4.12 \times 10^4)$

(घ) $\dfrac{9.60 \times 10^7}{1.60 \times 10^4}$

समाधान

(क) $3.4 \times 10^2 + 4.57 \times 10^3$

$= 0.34 \times 10^3 + 4.57 \times 10^3$

$= (0.34 + 4.57) \times 10^3$

$= 4.91 \times 10^3$

वैकल्पिक विधि

$3.4 \times 10^2 + 4.57 \times 10^3$

$= 3.4 \times 100 + 4.57 \times 1000$

$= 340 + 4570$

$= 4910 \quad = 4.91 \times 10^3$

(ख) $4.54 \times 10^{-3} - 2.4 \times 10^{-3}$

$= (4.54 - 2.4) \times 10^{-3}$

$= 2.14 \times 10^{-3}$

(ग) $(2.0 \times 10^3) \times (4.12 \times 10^4)$

$= (2.0 \times 10^3) \times (4.12 \times 10^4)$

$= 2.0 \times 4.12 \times 10^3 + 4$

$= 8.24 \times 10^7$

(घ) $\dfrac{9.60 \times 10^7}{1.60 \times 10^4}$

$= \dfrac{9.60}{1.60} \times 10^{7-4}$

$= 6 \times 10^3$

अभ्यास 3.3

1. सरल गरी उत्तर वैज्ञानिक सङ्केतमा लेख्नुहोस् :

(क) $(1.2 \times 10^5) + (5.35 \times 10^6)$ (ख) $6.91 \times 10^{-2} + 2.4 \times 10^{-3}$

(ग) $9.70 \times 10^6 + 8.3 \times 10^5$ (घ) $3.67 \times 10^2 - 1.6 \times 10^1$

(ङ) $8.41 \times 10^{-5} - 7.00 \times 10^{-6}$ (च) $1.33 \times 10^5 - 4.9 \times 10^4$

2. सरल गरी उत्तर वैज्ञानिक सङ्केतमा लेख्नुहोस् :

(क) $(4.3 \times 10^8) \times (2.0 \times 10^6)$ (ख) $(6.0 \times 10^3) \times (1.5 \times 10^{-2})$

(ग) $(1.5 \times 10^{-2}) \times (8.0 \times 10^{-1})$ (घ) $(5.23 \times 10^{11}) \times (3.0 \times 10^{-10})$

(ङ) $\dfrac{1.20 \times 10^{-8}}{3.0 \times 10^{-3}}$ (च) $\dfrac{7.8 \times 10^{-12}}{1.3 \times 10^{-13}}$ (छ) $\dfrac{8.4 \times 10^{-4}}{1.2 \times 10^{-3}}$

(ज) $\dfrac{5.6 \times 10^{-18}}{1.4 \times 10^{-8}}$ (झ) $\dfrac{8.1 \times 10^9}{9.0 \times 10^8}$ (ञ) $\dfrac{3.25 \times 10^{-10}}{1.625 \times 10^{-15}}$

3. सरल गर्नुहोस् :

(क) $\dfrac{(1.1\times10^3) + 2.3 \times 10^3}{1.7 \times 10^{-6}}$ (ख) $\dfrac{9.8 \times 10^8 - 4.9 \times 10^8}{7.0 \times 10^7}$

(ग) $\frac{(2.1\times10^{6}) \times (4.0 \times 10^{-3})}{4.2 \times 10^{-4}}$ (घ) $\frac{6.48 \times 10^{5}}{(2.4 \times 10^{4}) \times (1.8 \times 10^{-2})}$

4. एउटा ट्याङ्कीमा 3.2×10^{4} लिटर पानी छ र दोस्रो ट्याङ्कीमा 1.3×10^{3} लिटर पानी छ भने दुवै ट्याङ्कीमा गरी जम्मा कति लिटर पानी होला ?
5. 2.7×10^{9} km टाढा पुग्नु पर्ने एउटा रकेटले 1.35×10^{9} दुरी पार गरिसक्यो भने अब कति दुरी पार गर्न बाँकी रह्यो, पत्ता लगाउनुहोस् ।
6. 9.6×10^{6} लिटर पेट्रोललाई 1.6×10^{3} लिटरका कतिओटा बराबर ट्याङ्कीमा राख्न सकिएला ?
7. एउटा पोखरीमा 1.8×10^{8} लिटर पानी छ। यदि 1.6×10^{5} लिटर पानी खोलेर पठाइयो भने पोखरीमा कति पानी बाँकी छ, वैज्ञानिक सङ्केतमा लेख्नुहोस् ।

परियोजना कार्य

तपाइँ र तपाइँको सबभन्दा मिल्ने एकजना साथीको तौल कि.ग्रा. मा लेख्नुहोस् । अब तपाइँहरूको तौललाई मिलीग्राममा परिवर्तन गरी वैज्ञानिक सङ्केतमा लेख्नुहोस् । तपाइँहरूको जम्मा तौल र फरक वैज्ञानिक सङ्केतमा प्रस्तुत गर्नुहोस् ।

उत्तर

1.	(क) 5.47×10^{6}	(ख) 7.15×10^{-2}	(ग) 10.53×10^{6}
	(घ) 3.51×10^{2}	(ङ) 7.71×10^{-5}	(च) 8.4×10^{4}
2.	(क) 8.6×10^{14}	(ख) 9.0×10^{1}	(ग) 1.20×10^{-2}
	(घ) 1.569×10^{2}	(ङ) 0.4×10^{-5}	(च) 6.0×10^{1}
	(छ) 7.0×10^{7}	(ज) 4.0×10^{-10}	(झ) 0.9×10^{1}
	(ञ) 2.0×10^{5}		
3.	(क) 2.0×10^{9}	(ख) 7.0×10^{0}	(ग) 2.0×10^{7}
	(घ) 1.5×10^{3}	4. 3.33×10^{4}	5. 1.35×10^{9} km
	6. 6000 ओटा	7. 1.7984×10^{8}	

पाठ 4

अनुपात र समानुपात
(Ratio and Proportion)

4.0 पुनरवलोकन (Review)

कक्षामा भएका विद्यार्थी आवश्यकताअनुसारको समूहमा विभाजन भई तल दिइएका प्रश्नहरूमा छलफल गर्नुहोस् र प्राप्त निष्कर्ष कक्षामा प्रस्तुत गर्नुहोस् :

(क) तपाईँको कक्षामा भएका छात्र र छात्राको सङ्ख्या कति कति छ ?

(ख) छात्र र छात्राको अनुपात निकाल्नुहोस् ।

(ग) छात्र र जम्मा विद्यार्थीको अनुपात निकाल्नुहोस् ।

(घ) छात्रा र जम्मा विद्यार्थीको अनुपात निकाल्नुहोस् ।

(ङ) छात्र र जम्मा विद्यार्थीको सङ्ख्यालाई भिन्नका रूपमा लेख्नुहोस् ।

(च) छात्रा र जम्मा विद्यार्थीको सङ्ख्यालाई भिन्नका रूपमा लेख्नुहोस् ।

4.1 अनुपात (Ratio)

क्रियाकलाप 1

दिइएको चित्र अवलोकन गरी तलका प्रश्नहरूमा छलफल गर्नुहोस् :

सोभित

सोभिना

(क) के सिसाकलम र कलमको सङ्ख्याको अनुपात निकाल्न सकिन्छ ? यदि सकिन्छ भने कति होला, निकाल्नुहोस् ?

(ख) एउटा सिसाकलमको मूल्य र एउटा कलमको मूल्य निकाल्नुहोस् ।

(ग) एउटा सिसाकलमको मूल्य र एउटा कलमको मूल्यको अनुपात निकाल्नुहोस् ।

(ग) एउटा सिसाकलमको मूल्य र एउटा कलमको मूल्यको अनुपात निकाल्नुहोस् ।

यहाँ,

(क) सिसाकलम र कलमको सङ्ख्याको

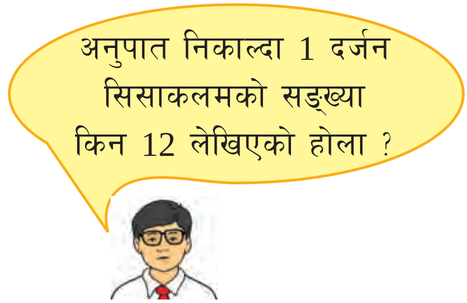
अनुपात $= \frac{12}{6} = 2:1$

(ख) एउटा सिसाकलमको मूल्य $= \frac{120}{12}$

= रु.10

एउटा कलमको मूल्य $= \frac{150}{6}$ = रु. 25

(ग) एउटा सिसाकलमको मूल्य र एउटा कलमको मूल्यको अनुपात $= \frac{10}{25} = 2:5$



यदि तुलना गर्नुपर्ने परिमाणहरू a र b का एकाइ एउटै भए, a र b को अनुपातलाई $\frac{a}{b}$ वा $a:b$ तथा b र a को अनुपातलाई $\frac{b}{a}$ वा $b:a$ लेखिन्छ । यहाँ, $a:b$ लाई a is to b अथवा $b:a$ लाई b *is to* a भनेर पढिन्छ ।

उदाहरण 1

तलका परिमाणहरूको अनुपात निकाल्नुहोस् :

(क) 25 cm र 30 cm

(ख) 2 दर्जन र 20 ओटा

(ग) 250 gm र 1 kg

समाधान

(क) यहाँ,

25 cm र 30 cm को अनुपात $= \frac{25}{30} = \frac{5}{6} = 5:6$

(ख) यहाँ,

2 दर्जनलाई ओटामा निकाल्दा, [∵ दुवैलाई एउटै एकाइ बनाउँदा]

$= 2 \times 12 = 24$ ओटा हुन्छ ।

अतः 2 दर्जन र 20 ओटाको अनुपात $= \frac{24}{20} = \frac{6}{5} = 6:5$

(ग) यहाँ, 1kg लाई gm मा निकाल्दा, [∵ दुवैलाई एउटै एकाइ बनाउँदा]

1 kg = 1000 gm हुन्छ ।

अतः 250 gm र 1 kg को अनुपात $= \frac{250}{1000} = \frac{1}{4} = 1:4$

उदाहरण 2

मोहम्मद र अब्दुलले एउटा कारखानामा 2:3 को अनुपातमा लगानी गरेका रहेछन् । यदि मोहम्मदले रु. 2,00,000 लगानी गरेको रहेछ भने अब्दुलले कति लगानी गरेको रहेछ ?

समाधान

यहाँ, मोहम्मद र अब्दुलको लगानीको अनुपात = 2:3

मोहम्मदको लगानी = रु. 2,00,000

अब्दुलको लगानी = ?

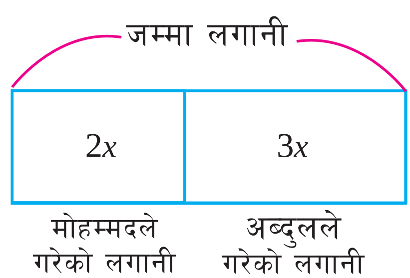
अब, $\frac{\text{मोहम्दको लगानी}}{\text{अब्दुलको लगानी}} = \frac{2}{3}$

or, $\frac{2,00,000}{\text{अब्दुलको लगानी}} = \frac{2}{3}$

$\therefore$ अब्दुलको लगानी $= \frac{3 \times 2,00,000}{2}$

= रु. 3,00,000

तसर्थ, अब्दुलले रु. 3,00,000 लगानी गरेको रहेछ ।



वैकल्पिक विधि

मोहम्मदको लगानी = रु. 2,00,000

प्रश्नअनुसार,

$2x = 200000$

or, $x = 100000$

अब अब्दुलको लगानी $= 3x = 3 \times 1,00,000$

तसर्थ अब्दुलले रु. 3,00,000 लगानी गरेको रहेछ ।

उदाहरण 3

विशाल र धनियाँको हालको उमेरको अनुपात 4:5 छ। 4 वर्षपछि उनीहरूको उमेरको अनुपात 5:6 हुन्छ भने हाल उनीहरूको उमेर कति कति रहेछ, पत्ता लगाउनुहोस्।

समाधान

मानौँ विशालको हालको उमेर $4x$ भए धनियाँको हालको उमेर $5x$ हुन्छ ।

4 वर्ष पछि

विशालको उमेर $= 4x + 4$

धनियाँको उमेर $= 5x + 4$

प्रश्नअनुसार,

$$\frac{4x+4}{5x+4} = \frac{5}{6}$$

or, $24x + 24 = 25x + 20$

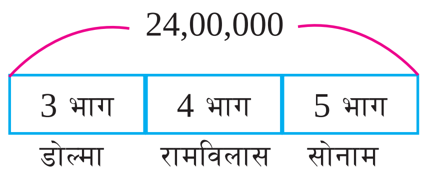
$\therefore x = 4$

अतः विशालको हालको उमेर $= 4x = 4 \times 4 = 16$ र

धनियाँको हालको उमेर $= 5x = 5 \times 4 = 20$ रहेछ ।

उदाहरण 4

डोल्मा, रामविलास र सोनामको वार्षिक आम्दानीको अनुपात 3:4:5 छ। यदि उनीहरूको आम्दानीको योगफल रु. 24,00,000 हुने रहेछ भने प्रत्येकको वार्षिक आम्दानी कति कति रहेछ ?



समाधान

यहाँ,

यहाँ जम्मा आम्दानी रु. 24,00,000

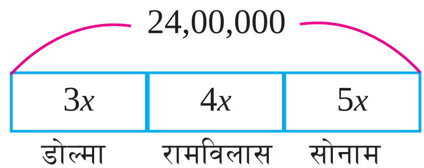
डोल्मा, रामविलास र सोनामको आम्दानीको अनुपात = 3:4:5

तसर्थ डोल्माको आम्दानी $= \frac{3}{12} \times 24,00,000 = 6,00,000$

रामविलासको आम्दानी $= \frac{4}{12} \times 24,00,000 = 8,00,000$

सोनामको आम्दानी $= \frac{5}{12} \times 24,00,000 = 10,00,000$

वैकल्पिक विधि



प्रश्नअनुसार,

$3x + 4x + 5x = 24,00,000$

or, $12x = 24,00,000$

$\therefore x = 2,00,000$

अतः डोल्माको वार्षिक आम्दानी $= 3x = 3 \times 2,00,000 =$ रु. 6,00,000,

रामविलासको वार्षिक आम्दानी $= 4x = 4 \times 2,00,000 =$ रु. 8,00,000 र

सोनामको वार्षिक आम्दानी $= 5x = 5 \times 2,00,000 =$ रु. 10,00,000 रहेछ ।

अभ्यास 4.1

1. **तल दिइएका परिमाणहरूबाट अनुपात पत्ता लगाउनुहोस् :**

(क) 4 hrs र 6 hrs (ख) 12 ft र 9 ft

(ग) 250 gram र 2 kg (घ) 3 kg र 850 gram

(ङ) 2 hrs र 45 minute (च) 40 minute र 1 hr

(छ) 2 *l* र 850 *ml* (ज) Rs 5 र 90 paisa

2. (क) श्री कालिका मा.वि.मा छात्र र छात्राको अनुपात 5:8 छ । यदि उक्त विद्यालयमा छात्राको सङ्ख्या 480 भए छात्रको सङ्ख्या कति होला ?

(ख) नेपाल मा.वि.को शिक्षक र विद्यार्थी अनुपात 1:32 छ । यदि उक्त विद्यालयमा जम्मा 25 जना शिक्षक भए विद्यार्थी सङ्ख्या कति होला ?

(ग) महेन्द्र ग्राम मा.वि.को छात्र र छात्राको अनुपात 3:5 छ । यदि उक्त विद्यालयमा छात्रको सङ्ख्या 330 भए छात्राको सङ्ख्या कति होला ?

3. (क) रु. 840 लाई 3:4 को अनुपातमा जोन र जोसेफलाई बाँडियो भने प्रत्येकले कति कति रुपियाँ पाउँछन् ?

(ख) दुई जना पुस्तक पसलेले एकै किसिमका 50 दर्जन अभ्यास पुस्तिका होलसेल पसलबाट किने । यदि उनीहरूले उक्त पुस्तिका 5:7 को अनुपातमा बाँडे भने प्रत्येक पसलले कति कतिओटा अभ्यास पुस्तिका पाए होलान्, पत्ता लगाउनुहोस् ।

4. (क) 1:2000 मा खिचिएको नक्सामा दुई स्थान बिचको दुरी 8 cm भए उक्त स्थानहरू विचको वास्तविक दुरी कति होला ?

(ख) 1: 4000 को स्केलमा खिचिएको नक्सामा दुई स्थान बिचको दुरी 5 cm भए उक्त स्थानहरू बिचको वास्तविक दुरी कति होला ?

5. (क) रीता र नग्माको हालको उमेरको अनुपात 4:5 रहेछ । यदि 2 वर्षअघि उनीहरूको उमेरको अनुपात 3:4 थियो भने उनीहरूको हालको उमेर कति कति रहेछ, पत्ता लगाउनुहोस् ।

(ख) दुई दाजुभाइले साथीको जन्मदिनको अवसरमा 4:5 को अनुपातमा खर्च गरेछन् । यदि दुवैले उक्त रकममा थप रु. 10/10 खर्च गरेका भए तिनीहरूको खर्चको अनुपात 5:6 हुन्थ्यो भने प्रत्येकको खर्च पत्ता लगाउनुहोस् ।

(ग) दुई सङ्ख्याहरू 1:3 को अनुपातमा रहेका छन् । यदि दुवै सङ्ख्यामा 5 जोड्दा 1:2 को अनुपातमा हुन्छन् भने ती सङ्ख्याहरू पत्ता लगाउनुहोस् ।

(घ) अलि र आमिरको हालको उमेरको अनुपात 3:4 रहेछ । यदि 3 वर्ष अगाडि उनीहरूको उमेरको अनुपात 2:3 थियो भने उनीहरूको हालको उमेर कति कति रहेछ, पत्ता लगाउनुहोस् ।

6. (क) 8, 9 र 10 उमेरका बालिकाहरूलाई रु. 216 उनीहरूको उमेरको अनुपातमा बाँड्दा प्रत्येकले कति कति रुपियाँ पाउलान् ?

(ख) विपिन, अमृत र आशिषले 2:5:6 को अनुपातमा लगानी गरी एउटा व्यवसाय सञ्चालन गरे । एक वर्षपछि उनीहरूले रु. 65,00,000 आम्दानी गरे भने प्रत्येकले कति कति रकम आम्दानी गरे होलान् ?

7. (क) A ले भन्दा B ले दोब्बर र B ले भन्दा C ले तेब्बर रकम जम्मा गर्दा रु. 98460 जम्मा भयो भने प्रत्येकले कति कति रकम जम्मा गरे होलान् ?

(ख) रामले भन्दा कृष्णले दोब्बर र कृष्णले भन्दा हरिले तेब्बर रकम जम्मा गर्दा रु 16200 जम्मा भयो भने प्रत्येकले कति कति रकम जम्मा गरे होलान् ?

8. (क) त्रिभुजका कोणहरूको अनुपात 1:1:2 भए ती कोणहरू पत्ता लगाउनुहोस् ।

(ख) त्रिभुजका कोणहरूको अनुपात 2:3:4 भए ती कोणहरू पत्ता लगाउनुहोस् ।

परियोजना कार्य

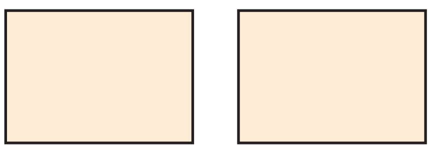
तपाईंको छिमेकको कुनै पाँच परिवारका सदस्यहरूको उमेर टिपोट गर्नुहोस् । प्राप्त विवरणलाई 16 वर्षसम्म 17 देखि 40 सम्म र 40 वर्षभन्दा माथिका उमेरका आधारमा तालिकीकरण गरी उक्त तीन समूहको उमेरलाई अनुपातमा प्रस्तुत गर्नुहोस् र प्राप्त निष्कर्षलाई कक्षामा छलफल गर्नुहोस् ।

उत्तर

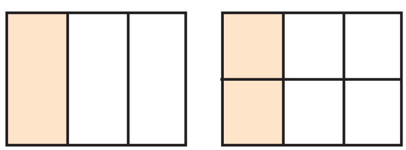
1. (क) 2:3 (ख) 4:3 (ग) 1:8 (घ) 60:17
   (ङ) 8:3 (च) 2:3 (छ) 40:17 (ज) 50:9
2. (क) 300 जना (ख) 800 जना (ग) 550 जना
3. (क) 360,480 (ख) 250,350
4. (क) 160 m (ख) 200 m
5. (क) 8, 10 (ख) 40, 50 (ग) 5, 15 (घ) 9:12
6. (क) रु.64, रु.72 र रु.80 (ख) रु.10,00,000, रु.25,00,000 र रु.30,00,000
7. (क) A ले रु.10940, B ले रु. 21880, C ले रु. 65640
   (ख) रामले रु.1800, कृष्णले रु.3600, हरिले रु.10800
8. (क) 45°, 45°, 90° (ख) 40°, 60°, 80°

4.2 समानुपात (Proportion)

क्रियाकलाप 2



दुई दुई जनाको जोडीमा विभाजन भई प्रत्येकले एक एकओटा फोटोकपी पेपर लिनुहोस् । पहिलोले 3 बराबर भागमा कागज पट्याएर एक भागमा रङ लगाउनुहोस् भने दोस्रोले 6 बराबर भागमा कागज पट्याएर दुई भागमा रङ लगाउनुहोस् । दुवै जनाले रङ लगाएको र नलगाएको भागलाई अनुपातमा प्रस्तुत गर्नुहोस् । तलका विषयमा समूहमा छलफल गरी प्राप्त निष्कर्षलाई कक्षामा प्रस्तुत गर्नुहोस् :



(क) पहिलो र दोस्रोको अनुपातमा के सम्बन्ध रहेको छ ?

(ख) के ती दुई अनुपातलाई समानुपात भन्न सकिन्छ ?

कुनै दुई अनुपातका न्यूनतम पदहरू बराबर हुन्छन् भने त्यस्ता अनुपातलाई समानुपात भनिन्छ, जस्तै : दुईओटा एउटै एकाइमा भएका परिमाणहरू a र b को अनुपात र c र d को अनुपात बराबर भए a, b, c र d समानुपातमा हुन्छन् । यसलाई $a:b::c:d$ लेखिन्छ । यहाँ a र d लाई Extremes, b र c लाई Means भनिन्छ । Extremes र Means को छुट्टाछुट्टै गुणनफल बराबर हुन्छ ।

उदाहरण 1

5, 8, 10, *a* समानुपातमा भए *a* को मान पत्ता लगाउनुहोस् ।

समाधान

5, 8, 10, a समानुपातमा भएकाले,

$$\frac{5}{8} = \frac{10}{a}$$

or, $5a = 80$

$\therefore a = 16$

उदाहरण 2

सङ्ख्याहरू 4 र 5 मा कुन सङ्ख्या जोड्दा तिनीहरूको अनुपात 5:6 हुन्छ ?

समाधान

मानौँ सङ्ख्याहरू 4 र 5 मा जोड्नु पर्ने सङ्ख्या y छ ।

प्रश्नअनुसार,

$$\frac{4+y}{5+y} = \frac{5}{6}$$

or, $24 + 6y = 25 + 5y$

$\therefore y = 1$

तसर्थ सङ्ख्याहरू 4 र 5 लाई 5:6 बनाउन दुवैमा 1 जोड्नुपर्छ ।

उदाहरण 3

रु. 150 मा 12 ओटा केरा पाइन्छन् भने रु. 900 मा कतिओटा केरा पाइन्छन् ?

समाधान

मानौँ रु. 900 मा x ओटा केरा पाइन्छ ।

मूल्यको अनुपात = केराको अनुपात

अब,

$$\frac{150}{900} = \frac{12}{x}$$

मूल्य	केराको सङ्ख्या
रु.150	12
रु.900	x

or, $150x = 900 \times 12$

$$\therefore x = \frac{900 \times 12}{150} = 72$$

तसर्थ रु. 900 मा 72 ओटा केरा पाइन्छ ।

उदाहरण 4

एक जना चिया पसलेले दुधको चिया बनाउँदा दुध र पानीलाई 3:5 को अनुपातमा मिसाउने गरेको छ । यदि दुई गिलास चिया बनाउँदा 300 ml दुध मिसाएको रहेछ भने कति ml पानी मिसाएको छ होला, पत्ता लगाउनुहोस् ।

मानौँ उक्त पसलले x ml पानी मिसाएको रहेछ ।

अब,

$$\frac{300}{x} = \frac{3}{5}$$

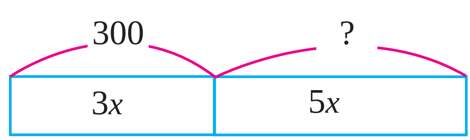
or, $3x = 300 \times 5$

$$\therefore x = \frac{300 \times 5}{3} = 500 \text{ ml}$$

$3x = 300$

$$x = \frac{300}{3} = 100$$

$5x = 5 \times 100 = 500$



अतः उक्त पसलले दुई गिलास चिया बनाउँदा 500 ml पानी मिसाएको रहेछ ।

अभ्यास 4.2

1. तलका सङ्ख्याहरू समानुपातमा छन् कि छैनन् जाँच्नुहोस् र लेख्नुहोस् :

(क) 5, 8, 10, 15 (ख) 3, 5, 6, 10

(ग) 1kg, 4kg, 6kg,10kg (घ) 5 cm, 8 cm, 10 cm, 16 cm

(ङ) 5m, 3m, 25m, 15m (च) 3ft, 8ft, 12ft, 22ft

2. तलका सङ्ख्याहरू समानुपातमा भए थाहा नभएका पद पत्ता लगाउनुहोस् :

(क) a, 3, 3, 9 (ख) 3, x, 6, 8

(ग) 2, 5, 8, d (घ) x, 2, 6, 4

(ङ) 16, 4, 4, y (च) 7, 9, z, 18

3. x को मान पत्ता लगाउनुहोस् :

(क) x:5 = 10:25 (ख) 3:7 = 21:x

(ग) 10:x = 2:11 (घ) 25:15 = x:3

4. (क) सङ्ख्याहरू 12 र 21 लाई 5:8 बनाउन दुवैमा कति जोड्नु पर्ला ?

(ख) सङ्ख्याहरू 15 र 25 लाई 2:3 बनाउन पर्दा दुवैमा कति जोड्नु पर्ला ?

(ग) सङ्ख्याहरू 24 र 30 लाई 3:4 बनाउन दुवैमा कति घटाउनु पर्ला ?

5. (क) रु. 600 मा 12 ओटा कापी पाइन्छ भने रु. 900 मा कतिओटा कापी पाइन्छ ?

(ख) रु. 50 मा 5 ओटा कलम पाइन्छ भने रु. 240 मा कति ओटा कलम पाइन्छ ?

6. (क) राष्ट्रिय प्रा.वि. मा सिसाकलम र कलम प्रयोग गर्ने विद्यार्थीको अनुपात 10:11 छ । यदि सिसाकलम प्रयोग गर्ने 110 जना विद्यार्थी भए कलम प्रयोग गर्ने विद्यार्थी सङ्ख्या पत्ता लगाउनुहोस् ।

(ख) महेन्द्र मा.वि. मा विद्यालयमा खाजा खाने र घरबाट खाजा ल्याउने विद्यार्थीको अनुपात 3:2 छ । यदि विद्यालयमा खाजा खाने विद्यार्थी सङ्ख्या 321 भए घरबाट खाजा ल्याउने विद्यार्थीको सङ्ख्या पत्ता लगाउनुहोस् ।

(ग) रीना र मीना दुई दिदीबहिनी हुन् । कक्षा 10 पढ्ने रीना र कक्षा 8 मा पढ्ने मीनाले किताब किन्दा लागेको खर्चको अनुपात 3:2 छ । यदि मीनाले रु. 824 तिरिन् भने रीनाले कति तिरिन् ?

(घ) एउटा मिठाईमा दुध र चिनीको अनुपात 5:2 छ । यदि दुध 750 gm छ भने चिनीको भाग कति होला ?

(ङ) चन्द्रमा र पृथ्वीको गुरुत्वाकर्षणको अनुपात 1:6 छ । पृथ्वीमा 90 N तौल भएका वस्तुको तौल चन्द्रमामा कति होला पत्ता लगाउनुहोस् ।

7. (क) कोपिलाले नेपाली, अङ्ग्रेजी, गणित र विज्ञानमा समानुपातिक अङ्क प्राप्त गरिन् । यदि ती विषयहरूमा क्रमशः 25, 30, 75 र x प्राप्त गरिन् भने x को मान कति होला ?

(ख) अब्दुलले वैशाख, जेठ, असार र साउनमा खाजामा खर्च गरेको रकम समानुपातिकमा छ । यदि ती महिनामा क्रमशः 150, 200, x र 240 खर्च गरिन् भने x को मान कति होला ?

उत्तर

1. (क) छैन	(ख) छ	(ग) छैन	(घ) छ	(ङ) छ	(च) छैन
2. (क) 1	(ख) 4	(ग) 20	(घ) 3	(ङ) 1	(च) 14
3. (क) 2	(ख) 49	(ग) 55	(घ) 5		
4. (क) 3	(ख) 5	(ग) 6	5. (क) 18	(ख) 24	
6. (क) 121	(ख) 214	(ग) 1236	(घ) 300 gm	(ङ) 15 N	
7. (क) 90	(ख) 180				

पाठ 5

नाफा र नोक्सान
(Profit and Loss)

5.0 पुनरवलोकन (Review)

दिइएको संवाद अध्ययन गरी निम्नलिखित प्रश्नहरूमा छलफल गर्नुहोस् :

दिना कक्षा 8 मा अध्ययन गर्ने एक छात्रा हुन् । एक दिन उनी आफ्नी आमासँग बजार गएकी थिइन् । एउटा पसलमा उनले चित्रमा देखाइएको जस्तै गरी लुगालाई sale भनेर राखेको देखिन् । उनलाई त्यस बारेमा जान्ने जिज्ञासा भयो र यो कुरा आमालाई सुनाइन् र पसलको नजिकै गइन् । संयोगवश त्यसैवेला उनले त्यस पसलमा आफ्नो एक छिमेकी दाइलाई sale भनेर लेखिएको ठाउँमा अरू लुगा पनि राख्दै गरेको देखिन् । उनी नजिकै गएर ती दाइसँग गरेको कुराकानी पढौँ ।

दिना : नमस्कार दाइ । हजुर यहाँ कसरी ?

दाइ : ए ! नमस्कार दिना बहिनी । म यहाँ पसले काम गर्छु ।

दिना : ए हो र दाइ । अनि यी लुगालाई sale भनेर किन राखिएको त ?

दाइ : ए यो... (अलि मुस्कुराउँदै) पसलमा रहेका लुगामध्ये एउटा मात्र नापो भएका वा बेमौसमी लुगालाई सस्तोमा बेच्ने उद्देश्यका साथ sale भनेर राखिएको हो ।

दिना : (मूल्य रु.500 भनेर लेखी राखिएको पाइन्टलाई देखाउँदै) यो यसको बेच्ने मूल्य हो दाइ ?

दाइ : हो, यो पाइन्टको नापो एउटै खालको तीनओटा मात्र बाँकी भएकाले यहाँ राखिएको हो । हुन त यसलाई रु.700 मा किनिएको थियो (अलि सानो स्वरमा) ।

दिना : दाइ यसलाई (मूल्य रु.1200 भनेर लेखिएको स्विटरलाई देखाउँदै) कतिमा किन्नुभएको थियो ? भन्न सक्नुहुन्छ ?

दाइ : अक्मकाउँदै । अँ.... रु.900 ।
यतिकैमा दिना कि आमा नजिकै आइन् ।
आमा : (अलि पर रहेको भाडा पसललाई देखाउँदै) जाउँ हिँड त्यहाँ ।
दुवै जना छिमेकी दाइसँग बिदा भएर त्यहाँबाट हिँडे ।
(क) पाइन्टको क्रय मूल्य र विक्रय मूल्य कति कति रहेछ ?
(ख) स्विटरको क्रय मूल्य र विक्रय मूल्यमा कुन बढी रहेछ ?
(ग) उक्त पाइन्ट बेच्दा पसलेलाई नाफा वा घाटा के हुन्छ ? कति प्रतिशत हुन्छ ?
(घ) स्विटर बेच्दा उक्त पसलेलाई नाफा वा घाटा के हुने रहेछ ? कति प्रतिशत हुन्छ ?

5.1 छुट (Discount)

क्रियाकलाप 1

तलको अवस्था अध्ययन गरी दिइएका प्रश्नलाई समूहमा छलफल गरी निष्कर्ष निकाल्नुहोस् :

सरस्वती मा.वि. कक्षा 8 को छात्र सन्दीप जाडाका लागि ज्याकेट किन्न एउटा पसलमा गएछन् जहाँ त्यसको मूल्य चित्रमा देखाइएको जस्तै गरी राखिएको थियो । उनले ज्याकेट किनेपछि पसलेले उनलाई दायाँपट्टि दिइएको जस्तो बिल दिएछन् ।

आचार्य पसल
टाँडी, चितवन

नामः सन्दीप भण्डारी

क्र.सं.	सामानको नाम	मूल्य (रु.)	परिमाण	रकम (रु.)
१.	ज्याकेट	2200	1	2200
छुटः 10% ले आउने रकम				220
जम्मा रकम (रु)				1980
अक्षरेपिः रु.एक हजार नौ सय असी मात्र ।				

विनय
विक्रेता

(क) ज्याकेटको सुरुको मूल्य कति रहेछ ?
(ख) ज्याकेट किन्दा कति प्रतिशत छुट दिइएको रहेछ ?
(ग) उसले ज्याकेट किन्दा कति रकम छुट पाएको रहेछ ?

(घ) ज्याकेटको सुरुको मूल्य र उसले किन्दा तिरेको मूल्यको तुलना गर्नुहोस् ।

यहाँ, ज्याकेटको सुरुको मूल्य वा अङ्कित मूल्य रु.2200 छ । तोकिएको मूल्यमा 10% छुट दिँदा सन्दीपले रु.220 छुट पाएका छन् । अर्थात् उसले सुरुको मूल्यमा भन्दा रु.220 कममा ज्याकेट किनेका रहेछन् ।

जानी राखौँ

(क) व्यापारीले सामानको मूल्य निर्धारण गरी ग्राहकलाई बताउने मूल्यलाई अङ्कित मूल्य (marked price) भनिन्छ ।

(ख) कुनै वस्तुको अङ्कित मूल्यमा केही रकम कम गरी बिक्री गरिएको छ भने उक्त कम गरिएको रकमलाई छुट (discount) भनिन्छ ।

(ग) अङ्कित मूल्यमा केही छुट गरेर सामान किनिन्छ भने छुटपछिको मूल्यलाई विक्रय मूल्य भनिन्छ ।

(घ) विक्रय मूल्य = अङ्कित मूल्य (MP) – छुट रकम हुन्छ ।

(ङ) छुट रकम = अङ्कित मूल्य (MP) को छुट प्रतिशत

= MP × छुट प्रतिशत हुन्छ ।

उदाहरण 1

राजुकान्तले रु.600 पर्ने कथाको किताब 15% छुटमा किन्दा पसलेलाई कति रुपियाँ तिर्नुपर्ला ?

समाधान

यहाँ,

कथाको किताबको अङ्कित मूल्य (MP) = रु.600

छुट (D) = 15%

विक्रय मूल्य (SP) = ?

हामीलाई थाहा छ,

छुट रकम = 600 को 15%

$= 600 \times \frac{15}{100}$

= रु.90

वि.मू. (SP) = अ.मू.(MP) – छुट रकम

= 600 – 90

= रु.510

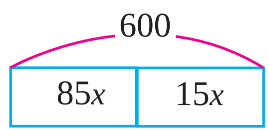
अर्को तरिका,

मानौँ अङ्कित मूल्य = $100x$ भए,

छुट मूल्य = $15x$

वि.मू. = $85x$

यहाँ, प्रश्नानुसार,



अङ्कित मूल्य = रु.600

or, $100x = 600$

$\therefore x = 6$

$85\,x = 85 \times 6$

= रु.510

∴ उक्त कथाको किताबको मूल्य रु.510 तिर्नुपर्छ ।

उदाहरण 2

नवीनले एउटा मोबाइल **8%** छुटमा किन्दा पसलेलाई रु.**22,080** तिर्नु पऱ्यो भने सो मोबाइलको अङ्कित मूल्य कति रहेछ, पत्ता लगाउनुहोस् ।

समाधान

यहाँ मोबाइलको छुट = 8%,

विक्रय मूल्य (SP) = रु.22,080

अङ्कित मूल्य (MP) = ?

मानौँ अङ्कित मूल्य = x छ ।

हामीलाई थाहा छ,

वि.मू. (SP) = अ.मू.– अ.मू.को छुट %

or, $22080 = x - x \times 8\%$

or, $22080 = x - \dfrac{8}{100}\,x$

or, $22080 = \dfrac{100x - 8x}{100}$

or, $22080 \times 100 = 92x$

or, $x = \dfrac{22080 \times 100}{92}$

$\therefore x = 24000$

अतः उक्त मोबाइलको अङ्कित मूल्य रु.24,000 रहेछ ।

अर्को तरिका,

यहाँ,

मानौँ अङ्कित मूल्य $= 100x$ भए,

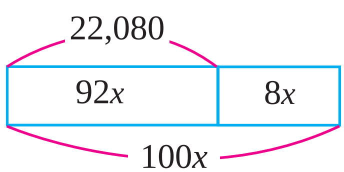
छुट मूल्य $= 8x$

वि.मू. = अङ्कित मूल्य – छुट

$= 100x - 8x$

$= 92x$

प्रश्नानुसार,



वि. मू. = रु.22,080

or, $92x = 22{,}080$

$\therefore x = 240$

अब,

अङ्कित मूल्य $= 100x$

$= 100 \times 240$

= रु.24,000

तसर्थ, उक्त मोबाइलको अङ्कित मूल्य रु.24,000 रहेछ ।

उदाहरण 3

जुजुमानले एउटा कम्प्युटर रु.**36000** मा किनेछन् । त्यस कम्प्युटरको अङ्कित मूल्य क्रय मूल्यको **25%** ले बढी कायम गरेछ । यदि जुजुमानले उक्त कम्प्युटरलाई **25%** नै छुटमा बेचे भने,

(क) उक्त कम्प्युटरको अङ्कित मूल्य कति होला ?

(ख) उसले कति रुपियाँ छुट दियो ?

(ग) जुजुमानले कति रुपियाँमा उक्त कम्प्युटर बेच्यो ?

(घ) उसलाई उक्त कम्प्युटरबाट कति प्रतिशत नाफा वा नोक्सान् भयो, पत्ता लगाउनुहोस् ।

समाधान

यहाँ, कम्प्युटरको क्रय मूल्य (CP) = रु.36,000

प्रश्नानुसार,

(क) अङ्कित मूल्य (MP) = ?

अङ्कित मूल्य (MP) = क्र.मू. + क्र.मू. को 25%

$= 36000 + 36000 \times \frac{25}{100}$

$= 36000 + 9000$

$= 45000$

(ख) छुट (Discount) = ?

हामीलाई थाहा छ,

छुट (Discount) = अङ्कित मूल्यको छुट प्रतिशत

= 45,000 को 25% $= 45,000 \times \frac{25}{100}$ = रु.11,250

(ग) विक्रय मूल्य (SP) = ?

सूत्रअनुसार,

∴ वि.मू. (SP) = अ.मू.(MP) − छुट (Discount)

$= 45,000 - 11,250$

= रु.33,750

(घ) यहाँ, कम्प्युटरको क्रय मूल्यभन्दा विक्रय मूल्य कम भएकाले नोक्सान हुन्छ ।

अब, नोक्सान = क्रय मूल्य − विक्रय मूल्य

$= 36,000 - 33,750$

= रु.2,250

$\therefore$ नोक्सान प्रतिशत $= \frac{\text{नोक्सान}}{\text{क्रय मूल्य}} \times 100\%$

$= \frac{2250}{36000} \times 100\% = 6.25\%$

अभ्यास 5.1

1. तलका वस्तुहरूको विक्रय मूल्य पत्ता लगाउनुहोस् :

सामग्रीहरू (Items)	अङ्कित मूल्य (Marked Price)	छुट (Discount)
किताब	रु. 480	रु. 48
जुत्ता	रु. 1250	रु. 250
क्यालकुलेटर	रु. 750	रु. 50
सर्ट	रु. 1500	रु. 300
मोबाइल	रु. 24500	रु. 480

2. दिइएको तालिकाका आधारमा विक्रय मूल्य पत्ता लगाउनुहोस् :

सामग्रीहरू (Items)	अङ्कित मूल्य (Marked Price)	छुट (Discount)
घडी	रु.2200	15%
ब्याग	रु.1750	12%
दराज	रु.30000	25%
कम्प्युटर	रु.40000	10%
टि.भी.	रु.54500	20%

3. तलको तालिकाबाट अङ्कित मूल्य पत्ता लगाउनुहोस् :

सामग्रीहरू (Items)	विक्रय मूल्य (Selling Price)	छुट (Discount)
मेच	रु.2150	14%
सारी	रु.1360	20%
कोट	रु.4100	18%
कम्प्युटर	रु.28800	10%
ल्यापटप	रु.80750	5%

4. दिइएको अङ्कित मूल्य र विक्रय मूल्यका आधारमा छुट प्रतिशत निकाल्नुहोस् :

सामग्रीहरू (Items)	अङ्कित मूल्य (Marked Price)	विक्रय मूल्य (Selling Price)
आइरन	रु.1800	1530

टेलिफोन सेट	रु.2500	2200
मोटरसाइकल	रु.245000	208250
घडी	रु.3000	2700
प्रिन्टर	रु.30000	26100

5. (क) रु.250 अङ्कित मूल्य भएको किताबमा 12% छुट दिन्छ भने सो किताबलाई कति तिर्नुपर्ला ?

   (ख) एउटा ज्याकेटको अङ्कित मूल्य रु.2250 छ । यदि पसलेले उक्त ज्याकेटमा 8% छुटमा बिक्री गर्छ भने उक्त ज्याकेट किन्न कति रुपियाँ तिर्नुपर्ला ?

6. (क) यदि 10% छुटमा किन्दा एउटा रङगीन टिभी सेटलाई रु.13950 पर्‍यो भने सो टिभी सेटको अङ्कित मूल्य कति होला, पत्ता लगाउनुहोस् ।

   (ख) 14% छुटमा किन्दा एउटा स्विटरलाई रु.1075 पर्‍यो भने सो स्विटरको अङ्कित मूल्य कति होला ?

7. एउटा पसलेले रु.1400 मा टर्च किनेछन् । त्यस टर्चको अङ्कित मूल्य क्रय मूल्यको 40% ले बढी तोक्यो । यदि पसलेले उक्त टर्चलाई 20% छुटमा बेच्यो भने,

   (क) उक्त टर्चको अङ्कित मूल्य कति होला ?

   (ख) क्रेताले कति रुपियाँ छुट पायो ?

   (ग) पसलेले कति रुपियाँमा उक्त टर्च बेच्यो ?

   (घ) पसलेले उक्त टर्चबाट कति रुपियाँ नाफा गर्‍यो, पत्ता लगाउनुहोस् ।

8. एउटा मोबाइलको क्रय मूल्य रु.21000 छ । त्यस मोबाइलको अङ्कित मूल्य क्रय मूल्यको 30% ले बढी छ । यदि पसलेले उक्त टर्चलाई 20% छुटमा बेच्यो भने,

   (क) उक्त मोबाइलको अङ्कित मूल्य कति होला ?

   (ख) क्रेताले कति रुपियाँ छुट पायो ?

   (ग) पसलेले कति रुपियाँमा उक्त मोबाइल बेच्यो ?

   (घ) पसलेले उक्त मोबाइलबाट कति प्रतिशत नाफा गर्‍यो ? पत्ता लगाउनुहोस् ।

9. रामहरिले एउटा कम्प्युटर रु.45000 मा किनेछन् । त्यस कम्प्युटरको अङ्कित मूल्य क्रय मूल्यको 30% ले बढी छ । यदि रामहरिले उक्त कम्प्युटरलाई 30% छुटमा बेचे भने,

   (क) उक्त कम्प्युटरको अङ्कित मूल्य कति होला ?

   (ख) कति रुपियाँ छुट दिइयो ?

(ग) रामहरिले कति रुपियाँमा उक्त कम्प्युटर बेचे ?

(घ) उनलाई उक्त कम्प्युटरबाट कति प्रतिशत नाफा वा नोक्सान भयो, पत्ता लगाउनुहोस् ।

10. रहमानले एउटा सुटकेसको अङ्कित मूल्य रु.6000 तोके । यदि उनले 15% छुट दिएर बेच्दा उनलाई रु.500 नाफा भयो भने,

(क) कति रुपियाँ छुट दिए ?

(ख) कति रुपियाँमा उक्त कम्प्युटर बेचे ?

(ग) रहमानले कति रुपियाँमा उक्त सुटकेस किनेका रहेछन् ?

(घ) उसनलाई उक्त सुटकेसबाट कति प्रतिशत नाफा भयो, पत्ता लगाउनुहोस् ।

परियोजना कार्य (Project Work)

तपाईंको घरमा दैनिक रूपमा प्रयोग हुने कुनै पाँचओटा सामानको विवरण तयार गर्नुहोस् । ती विवरणका आधारमा नजिकैको पसलमा गई तिनीहरूको अङ्कित मूल्य, विक्रय मूल्य र छुट पत्ता लगाउनुहोस् । ती सामानहरूलाई कति कतिमा किन्नुभएको रहेछ ? परिवारका सदस्यहरूसँग सोधेर टिपोट गर्नुहोस् । त्यसपछि ती जानकारीबाट नाफा वा नोक्सान के भयो, पत्ता लगाई त्यसको प्रतिशतसमेत निकालेर कक्षामा प्रस्तुत गर्नुहोस् ।

उत्तर

1. रु.432, रु.1000, रु.700, रु.1200, रु.24020
2. रु.1870, रु.1540, रु.22500, रु.36000, रु.43600
3. रु.2500, रु.1700, रु.5000, रु.32000, रु.85000
4. 15%, 12%, 15%, 10%, 13%
5. (क) रु.220 (ख) रु.2070
6. (क) रु.15500 (ख) रु.1250
7. (क) रु.1960 (ख) रु.392 (ग) रु.1568 (घ) 168
8. (क) रु.27300 (ख) रु.5460 (ग) रु.21840 (घ) 4%
9. (क) रु.58500 (ख) रु.17550 (ग) रु.40950 (घ) 9%
10. (क) रु.900 (ख) रु.5100 (ग) रु.4600 (घ) 10.87% (करिब)

पाठ 6

ऐकिक नियम
(Unitary Method)

6.0 पुनरवलोकन (Review)

दिइएको सूचनाका आधारमा तालिकाहरू भर्नुहोस् र छलफल गर्नुहोस् :

(अ) एउटा बस प्रति घण्टा 50 किलोमिटरका दरले समान गतिमा गुडिरहेको छ । दिइएको समयका आधारमा बसले पार गरेको दुरी र दुरीका आधारमा समय भर्नुहोस् :

समय (घण्टा)	1	2	3	4	
दुरी (कि.मी.)	50				250

(आ) 10 जना मानिसलाई एउटा काम गर्न 16 दिन लाग्छ । समान दरमा काम गर्ने हो भने दिइएको मानिसको सङ्ख्याको आधारमा दिन र दिनका आधारमा मानिसको सङ्ख्या पत्ता लगाई भर्नुहोस् :

दिन	16	8		2	1
मानिसको सङ्ख्या	10		40		

(क) समय बढाउँदै जादा बसले पार गरेको दुरी के भएको छ ?

(ख) बसले पार गरेको दुरी र समयबिच कस्तो सम्बन्ध रहेको छ ?

(ग) समय घटाउँदै जादा काम पूरा गर्न आवश्यक पर्ने मानिसको सङ्ख्या के भएको छ ?

(घ) कुनै काम गर्न लाग्ने दिन र कामदारको सङ्ख्याबिच कस्तो सम्बन्ध रहेको छ ?

यहाँ, (अ) मा बस जति धेरै घण्टा गुड्छ त्यसले पार गर्ने दुरी पनि सोही अनुपातमा बढ्दै गएको छ । त्यस्तै धेरै किलोमिटर गुड्न धेरै घण्टा लागेको छ । तसर्थ बस गुडेको समय र यसले पार गरेको दुरीबिच प्रत्यक्ष सम्बन्ध रहेको छ ।

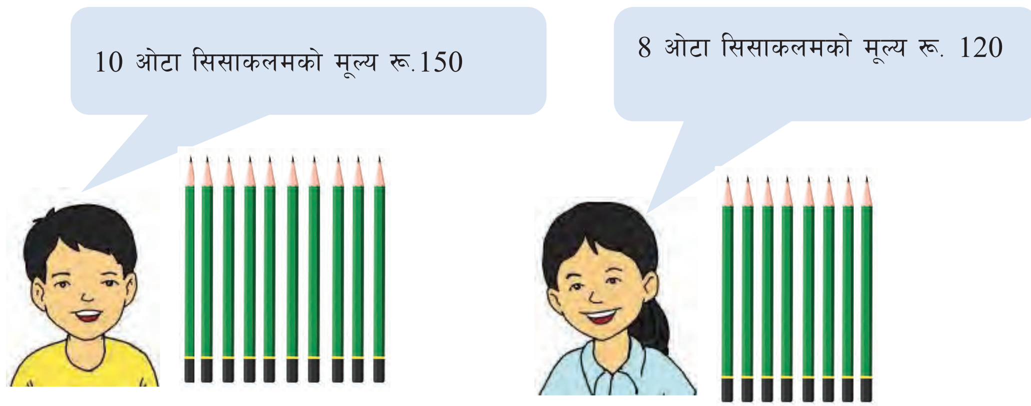
अर्को तर्फ (आ) मा कुनै काम सक्ने दिन घट्दै जाँदा काम गर्ने मानिसको सङ्ख्या पनि सोही अनुपातमा बढ्दै गएको छ । त्यस्तै काम गर्ने मानिसको सङ्ख्या घटाउँदै जाने हो भने काम सकिने दिन बढ्दै गएको छ । तसर्थ काम गर्ने मानिसको सङ्ख्या र काम सक्न लाग्ने दिनबिच अप्रत्यक्ष सम्बन्ध रहेको छ ।

दुईओटा चरहरूमध्ये एउटा चरमा वृद्धि वा कमी हुँदा अर्को चरमा पनि सोही अनुपातमा वृद्धि वा कमी हुन्छ भने यसलाई प्रत्यक्ष विचरण भनिन्छ । त्यसै गरी एउटा चरमा वृद्धि हुँदा अर्को चरमा पनि सोही अनुपातमा कमी हुन्छ र एउटा चरमा कमी हुँदा अर्को चरमा पनि सोही अनुपातमा वृद्धि हुन्छ भने यसलाई अप्रत्यक्ष विचरण भनिन्छ ।

6.1 प्रत्यक्ष विचरणको प्रयोग (Application of Direct Variation)

क्रियाकलाप 1

तलको चित्रमा भार्गव र भूमिकाले किनेको सिसाकलम र त्यसको मूल्य दिइएको छ। यसैका आधारमा तलका प्रश्नमा छलफल गर्नुहोस् :



भार्गव भूमिका

(क) एउटा सिसाकलमको मूल्य भार्गव र भूमिकामध्ये कसलाई बढी पर्‍यो ?

(ख) भार्गवसँग भएको सिसाकलम र भूमिकासँग भएको सिसाकलमको सङ्ख्याको अनुपात कति होला ?

(ग) भार्गवले तिरेको 10 ओटा सिसाकलमको मूल्य र भूमिकाले तिरेको 8 ओटा सिसाकलमको मूल्यको अनुपात कति होला ?

(घ) के सिसाकलमको सङ्ख्याको अनुपात र सिसाकलमको मूल्यको अनुपात बराबर छन् ?

(ङ) यदि भूमिकाले 12 ओटा सिसाकलम किनेकी भए कति रुपियाँ तिर्नु पर्ने थियो ?

यहाँ भार्गव र भूमिका दुवैलाई एउटा सिसाकलमको मूल्य रु.15 पर्‍यो। दुवैसँग भएको सिसाकलमको सङ्ख्याको अनुपात 5 : 4 र त्यसको मूल्यको अनुपात पनि 5 : 4 बराबर छ। सिसाकलमको सङ्ख्या र सिसाकलमको मूल्य प्रत्यक्ष विचरण हुन्। यदि भूमिकाले 12 ओटा सिसाकलम किनेको भए,

$$\frac{8}{12} = \frac{120}{x}$$

सिसाकलमको सङ्ख्या	सिसाकलमको मूल्य
8	120
12	x (मानौ)

or, $8x = 12 \times 120$

or, $x = \frac{1440}{8}$

= रु.180

तसर्थ, 12 ओटा सिसाकलमको मूल्य रु.180 पर्छ ।

उदाहरण 1

10 kg स्याउको मूल्य रु.950 पर्छ भने सोही दरले 3kg स्याउको मूल्य कति पर्ला ?

समाधान

यहाँ,

परिमाण (kg)	मूल्य (रु.)
10	950
3	x (मानौँ)

स्याउको परिमाण र मूल्यबिच प्रत्यक्ष विचरण भएकाले

$$\frac{10}{3} = \frac{950}{x}$$

or, $10 \times x = 3 \times 950$

or, $x = 3 \times 95$ = रु.285

तसर्थ, 3 kg स्याउको मूल्य रु.285 पर्छ ।

क्रियाकलाप 2

तलको अवस्थाको अध्ययन गरी छलफल गर्नुहोस् :

10 जना मानिसले 20 दिनमा रु.1,60,000 कमाउँछन् भने

(क) 1 जना मानिसले 1 दिनमा कति कमाउँछन् ?

(ख) उही दरले 15 जना मनिसले 10 दिनमा कति कमाउँछन् ?

(ग) 10 जना मानिसले उही दरले रु.96,000 कमाउन कति दिन काम गर्नुपर्ला ?

यहाँ,

(क) 10 जना मानिसले 20 दिनमा रु.1,60,000 कमाउँछन् ।

1 जना मानिसले 20 दिनमा रु. $\frac{1,60,000}{10}$ कमाउँछ ।

1 जना मानिसले 1 दिनमा रु. $\frac{1,60,000}{(10\times20)}$ = रु.800 कमाउँछ ।

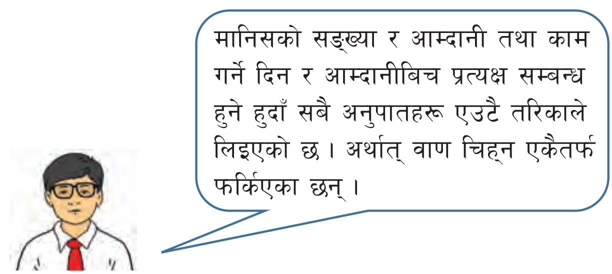
(क) यहाँ,

मानिस	दिन	आम्दानी (रु.)
10 ↑	20 ↑	1,60,000 ↑
1	1	x मानौं

अर्को तरिका,

$$\frac{1}{10}\times\frac{1}{20}=\frac{x}{1,60,000}$$

or, $x=\frac{1}{10}\times\frac{1}{20}\times 1,60,000$



or, $x = 800$

तसर्थ 1 जना मानिसले 1 दिनमा रु.800 कमाउँछ ।

(ख) 10 जना मानिसले 20 दिनमा रु.1,60,000 कमाउँछन् ।

1 जना मानिसले 20 दिनमा रु. $\frac{1,60,000}{10}$ कमाउँछ ।

1 जना मानिसले 1 दिनमा रु. $\frac{1,60,000}{(10\times20)}$ = रु.800 कमाउँछ ।

15 जना मानिसले 1 दिनमा रु.800 ×15 कमाउँछन् ।

15 जना मानिसले 10 दिनमा रु.800 ×15 ×10 कमाउँछन् ।

= रु.1,20,000 कमाउँछन् ।

यहाँ

मानिस	दिन	आम्दानी (रु.)
10 ↑	20 ↑	1,60,000 ↑
15	10	x (मानौँ)

अब $\frac{x}{1,60,000} = \frac{15}{10} \times \frac{10}{20}$

अथवा $x = \frac{15}{10} \times \frac{10}{20} \times 1,60,000$

अथवा $x = 1,20,000$

तसर्थ 15 जना मानिसहरूले 10 दिनमा रु.1,20,000 कमाउँछन् ।

(ग) 10 जना मानिसलाई रु.1,60,000 कमाउन 20 दिन लाग्छ ।

10 जना मानिसलाई रु.1 कमाउन $\frac{20}{1,60,000}$ दिन लाग्छ ।

10 जना मानिसलाई रु.96,000 कमाउन $\frac{20}{1,60,000} \times 96,000$ दिन लाग्छ ।

= 12 दिन लाग्छ ।

अर्को तरिका,

यहाँ,

मानिस	दिन	आम्दानी (रु.)
10 ↑	20 ↑	1,60,000 ↑
10	x (मानौँ)	96,000

अब, $\frac{x}{20} = \frac{96,000}{1,60,000} \times \frac{10}{10}$

or, $x = \frac{96,000}{1,60,000} \times \frac{10}{10} \times 20$

or, $x = 12$

तसर्थ, 10 जना मानिसले 12 दिनमा रु.96,000 कमाउँछन् ।

मानिसको सङ्ख्या बढ्दा उनीहरूको आम्दानी पनि बढ्ने र मानिसको सङ्ख्या घट्दा आम्दानी पनि घट्छ । तसर्थ, मानिस र आयबिच प्रत्यक्ष सम्बन्ध छ । त्यस्तै, मानिसले धेरै दिन काम गऱ्यो भने उसको आम्दानी पनि बढ्ने र थोरै दिन काम गरेमा आम्दानी पनि घट्ने हुन्छ । तसर्थ काम गरेको दिन र आम्दानीबिच प्रत्यक्ष सम्बन्ध हुन्छ ।

उदाहरण 2

30 जना मानिसले एउटा 600 मि.लामो पर्खाल 20 दिनमा बनाउँछन् । 15 जना मानिसले 18 दिनमा त्यस्तै कति मि. लामो पर्खाल बनाउँछन् ।

समाधान

यहाँ,

20 दिनमा 30 जना मानिसले 600 मि. लामो पर्खाल बनाउँछन् ।

1 दिनमा 30 जना मानिसहरूले $\frac{600}{20}$ l मि. लामो पर्खाल बनाउँछ । (दिन र काम : प्रत्यक्ष विचरण)

1 दिनमा 1 जना मानिसले $\frac{600}{20\times30}$ मि. लामो पर्खाल बनाउँछ । (मानिस र काम : प्रत्यक्ष विचरण)

18 दिनमा 1 जना मानिसले $\frac{600\times18}{20\times30}$ मि. लामो पर्खाल बनाउँछ । (दिन र काम : प्रत्यक्ष विचरण)

18 दिनमा 15 जना मानिसले $\frac{600\times18\times15}{20\times30}$ मि. लामो पर्खाल बनाउँछन् । (मानिस र काम : प्रत्यक्ष विचरण)

= 270 मी. लामो पर्खाल बनाउँछन् ।

अर्को तरिका

यहाँ,

मानिस	दिन	पर्खालको लम्बाइ (मि.)
30 ↑	20 ↑	600 ↑
15	18	x (मानौँ)

$$\frac{x}{600} = \frac{15}{30}\times\frac{18}{20}$$

$$\text{or, } x = \frac{15}{30} \times \frac{18}{20} \times 600$$

$$\therefore x = 270$$

अतः 18 दिनमा 15 जना मानिसले 270 मी. लामो पर्खाल बनाउँछन् ।

6.2 अप्रत्यक्ष विचरणको प्रयोग (Application of Indirect Variation)

क्रियाकलाप 3

दिइएको समस्या छलफल गरी समाधान गर्नुहोस् :

एउटा समुदायका 10 जना मानिस मिलेर 14 दिनमा एउटा बाँसको टहरा निर्माण गरेछन् । त्यसै गरी सोही नापको अर्को टहरा 7 जना मानिसले निर्माण सम्पन्न गर्ने गरी जिम्मा लिएछन् ।

(क) यदि पहिलो टहरा निर्माण गर्न उनीहरूले 8 घण्टाका दरले काम गरेका रहेछन् भने दोस्रो टहरा निर्माण कार्य 16 दिनमा सम्पन्न गर्न 7 जना मानिसलाई कति घण्टाका दरले काम गर्नुपर्ला ?

(ख) ती 7 जना मानिसले 8 घण्टाकै दरले काम गरे भने उनीहरूलाई दोस्रो टहरा निर्माण गर्न कति दिन काम गर्नुपर्छ होला ?

यहाँ,

10 जना मानिसले 14 दिनमा टहरा निर्माण गर्न प्रति दिन 8 घण्टाका दरले काम गर्नुपर्छ ।

1 जना मानिसले 14 दिनमा टहरा निर्माण गर्न प्रति दिन 8×10 घण्टाका दरले काम गर्नुपर्छ ।

(मानिस र कार्य घण्टा : अप्रत्यक्ष विचरण)

1 जना मानिसले 1 दिनमा टहरा निर्माण गर्न प्रति दिन $8 \times 10 \times 14$ घण्टाका दरले काम गर्नुपर्छ ।

(दिन र प्रति दिन कार्य घण्टा : अप्रत्यक्ष विचरण)

7 जना मानिसले 1 दिनमा टहरा निर्माण गर्न प्रति दिन $\frac{(8 \times 10 \times 14)}{7}$ घण्टाका दरले काम गर्नुपर्छ ।

(मानिस र कार्य घण्टा : अप्रत्यक्ष विचरण)

7 जना मानिसले 16 दिनमा टहरा निर्माण गर्न प्रति दिन $\frac{(8 \times 10 \times 14)}{7 \times 16} = 10$ घण्टाका

दरले काम गर्नुपर्छ ।

(दिन र प्रति दिन कार्य घण्टा : अप्रत्यक्ष विचरण)

तसर्थ, 7 जना मानिसले 16 दिनमा प्रति दिन 10 घण्टाका दरले सो टहरा निर्माण गर्न सक्छन् ।

अर्को तरिका,

यहाँ,

मानिस	दिन	घण्टा प्रति दिन
10	14	8
7	16	x (मानौँ)

अब,

$$\frac{x}{8} = \frac{14}{16} \times \frac{10}{7}$$

or, $x = \dfrac{14 \times 10}{16 \times 7} \times 8$

$\therefore x = 10$

अतः 7 जना मानिसले 16 दिनमा प्रति दिन 10 घण्टाका दरले सो टहरा निर्माण गर्न सक्छन् ।

(ख) यहाँ,

10 जना मानिसले प्रति दिन 8 घण्टाका दरले काम गर्दा 14 दिनमा सो टहरा निर्माण गर्न सक्छन् ।

1 जना मानिसले प्रति दिन 8 घण्टाका दरले काम गर्दा 14×10 दिनमा सो टहरा निर्माण गर्न सक्छन् ।

(मानिस र दिन : अप्रत्यक्ष विचरण)

7 जना मानिसले प्रति दिन 8 घण्टाका दरले काम गर्दा $\dfrac{(14 \times 10)}{7}$ दिनमा सो टहरा निर्माण गर्न सक्छन् ।

(मानिस र दिन : अप्रत्यक्ष विचरण)

7 जना मानिसले 8 घण्टाका दरले काम गर्दा $\frac{(10 \times 14)}{7}$ = 20 दिनमा सो टहरा निर्माण गर्न सक्छन् ।

अर्को तरिका

यहाँ,

मानिस	दिन	घण्टा प्रति दिन
10 ↓	14 ↑	8 ↓
7	x (मानौँ)	8

अब,

$$\frac{x}{14} = \frac{10}{7} \times \frac{8}{8}$$

or, $x = \frac{14 \times 10}{7}$

$\therefore x = 20$

तसर्थ 7 जना मानिसले 20 दिनमा प्रति दिन 8 घण्टाका दरले सो टहरा निर्माण गर्न सक्छन् ।

मानिसको सङ्ख्या बढ्दै जादाँ उनीहरूले प्रतिदिन काम गर्ने दर (कार्यघण्टा) घट्ने र मानिसको सङ्ख्या घट्दै जादाँ प्रतिदिन काम गर्ने दर बढ्छ । त्यस्तै दैनिक कार्यघण्टा घटाउँदा काम सम्पन्न गर्न आवश्यक दिन बढ्ने र दैनिक कार्यघण्टा बढाउँदा काम सम्पन्न गर्न आवश्यक दिन घट्ने हुन्छ । त्यसै गरी मानिसको सङ्ख्या बढ्दा काम पूरा हुन लाग्ने दिन घट्ने र मानिसको सङ्ख्या घट्दा काम पूरा हुन लाग्ने दिन बढ्ने हुन्छ । त्यसैले प्रति दिन काम गर्ने घण्टा र मानिसबिच तथा प्रति दिन काम गर्ने घण्टा र काम पूरा हुन लाग्ने दिन बिच, मानिस र काम पूरा हुन लाग्ने दिन बिच पनि अप्रत्यक्ष विचरण हुन्छ ।

उदाहरण 3

20 जना कामदारलाई कुनै काम गर्न 24 दिन लाग्छ भने 15 जना कामदारलाई सोही काम गर्न कति दिन लाग्ला ?

समाधान

यहाँ,

कामदारको सङ्ख्या	कार्य दिन
20	24
15	x (मानौँ)

कामदारको सङ्ख्या र काम गर्न लाग्ने दिने अप्रत्यक्ष विचरण हुन् ।

तसर्थ

$$\frac{20}{15} = \frac{x}{24}$$

or, $x \times 15 = 20 \times 24$

or, $x = \frac{20 \times 24}{15} = 32$

तसर्थ, 15 जना कामदारलाई सो काम गर्न 32 दिन लाग्छ ।

उदाहरण 4

24 दिनमा 6 ओटा घरमा रङ लगाउन 32 जना मानिस चाहिन्छ भने,

(क) एक जना मानिसले 6 ओटा घरमा रङ लगाउन कति दिन लाग्ला ?

(ख) 8 दिनमा काम पूरा गर्ने हो भने कति जना मानिस थप गर्नुपर्ला ?

(क) यहाँ,

32 जना मानिसलाई 6 ओटा घरमा रङ लगाउन 24 दिन लाग्छ ।

∴1 जना मानिसलाई 6 ओटा घरमा रङ लगाउन 24×32 दिन लाग्छ ।

= 768 दिन लाग्छ ।

अर्को तरिका,

मानिस	घर	कार्य दिन
32 ↓	6 ↓	24 ↑
1	6	x (मानौँ)

अब,

$$\frac{x}{24} = \frac{32}{1} \times \frac{6}{6}$$

or, $x = 32 \times 24$

$\therefore x = 768$

तसर्थ, 1 जना मानिसलाई 6 ओटा घरमा रङ लगाउन 768 दिन लाग्छ ।

(ख) यहाँ,

24 दिनमा 6 ओटा घरमा रङ लगाउन 32 जना मानिस चाहिन्छ ।

1 दिनमा 6 ओटा घरमा रङ लगाउन 32×24 जना मानिस चाहिन्छ ।

8 दिनमा 6 ओटा घरमा रङ लगाउन $\frac{32 \times 24}{8}$ जना मानिस चाहिन्छ ।

= 96 जना मानिस चाहिन्छ ।

$\therefore$ थप गर्नुपर्ने मानिसको सङ्ख्या = 96 – 32 = 64 जना ।

अर्को तरिका,

यहाँ,

कार्य दिन	घरको सङ्ख्या	मानिस
24 ↓	6 ↓	32 ↑
8	6	x (मानौँ)

अब,

$$\frac{x}{32} = \frac{24}{8} \times \frac{6}{6}$$

or, $x = 32 \times 3$

$x = 96$

∴ थप गर्नुपर्ने मानिसको सङ्ख्या $= 96 - 32 = 64$ जना ।

अभ्यास 6

1. **तलका तथ्यहरू प्रत्यक्ष विचरण (Direct Variation) भए D र अप्रत्यक्ष विचरण (Indirect Variation) भए I चिह्न लगाउनुहोस् :**

   (क) वृत्तको व्यासको लम्बाइ र त्यसको परिधिको नापबिचको सम्बन्ध ।

   (ख) छात्रावासमा भएका विद्यार्थी सङ्ख्या र निश्चित रासनले खान पुग्ने दिनबिचको सम्बन्ध ।

   (ग) निश्चित समय र निश्चित व्याजदरमा जम्मा गरिएको सावाँ र व्याज बिचको सम्बन्ध

   (घ) यातायातका साधनको गति र त्यसले पार गरेको दुरी बिचको सम्बन्ध ।

   (ङ) यातायातका साधनको गति र निश्चित दुरी पार गर्न लाग्ने समयबिचको सम्बन्ध ।

2. यदि 4 दर्जन कलमको मूल्य रु.576 पर्छ भने रु.228 मा कतिओटा कलम पाइएला ?
3. एक जना धावकले 45 मिनेटमा 18 km दौड पुरा गर्न सक्छ भने 30 km दुरी पार गर्न कति समय लाग्ला, पत्ता लगाउनुहोस् ।
4. एउटा मालबाहक ट्रक 48 km प्रति घण्टाले गुड्दा कुनै दुरी 6 घण्टामा पूरा गर्दछ । यदि उक्त ट्रकको गति घटेर 36 km प्रति घण्टा भयो भने उक्त दुरी कति घण्टामा पार गर्ला ?
5. कुनै एउटा काम पूरा गर्न 20 जना कामदारलाई 15 दिन लाग्छ । उक्त काम 12 दिनमा सिध्याउन कति जना कामदार थप्नुपर्ला ?
6. कुनै काम पूरा गर्न 12 जनालाई 14 दिन लाग्छ । यदि कामदार थपेर 21 जना बनाइयो भने उक्त काम कति दिनमा सकिएला ?
7. कुनै एउटा ब्यारेकमा 200 जना सिपाहीलाई 30 दिन पुग्ने रासन छ । उक्त रासन 40 दिनलाई पुऱ्याउन कति जना सिपाहीलाई अन्यत्र सार्नुपर्ला ?
8. एउटा मोटरसाइकल 30 km प्रति घण्टाका दरले गुड्दा कुनै दुरी पार गर्न 6 घण्टा लाग्छ । यदि उसलाई 5 घण्टामा उक्त दुरी पार गर्नुपऱ्यो भने उक्त माटेरसाइकलको

गति कतिले बढाउनुपर्ला ?

9. 3 ओटा कुर्सी र 4 ओटा टेबलको जम्मा मूल्य रु.7,540 पर्छ । यदि एउटा कुर्सीको मूल्य रु.220 पर्छ भने एउटा टेबलको मूल्य पत्ता लगाउनुहोस् ।

10. 5 ओटा गाई र 2 ओटा गोरुको जम्मा मूल्य रु.1,35,000 छ । यदि एउटा गोरुको मूल्य रु.17,500 भए एउटा गाईको मूल्य कति होला ?

11. यदि 4 जना मानिसले 10 दिनमा रु.28,000 कमाउँछन् भने
   (क) 1 जना मानिसले 1 दिनमा कति कमाउँछ ?
   (ख) 3 जना मानिसले 15 दिनमा कति कमाउँछन् ?
   (ग) 4 जना मानिसले 10 दिनमा कमाएको आम्दानी भन्दा 3 जना मानिसले 15 दिनमा कमाएको आम्दानी कति प्रतिशतले बढी वा घटी हुन्छ, पत्ता लगाउनुहोस् ।

12. यदि 48 जना मानिसलाई 30 दिनका लागि 700 के.जी. चामल चाहिन्छ भने
   (क) 40 जना मानिसलाई 36 दिनका लागि कति के.जी. चामल चाहिएला ?
   (ख) प्रति के.जी. चामलको मूल्य रु.60 का दरले 40 जना मानिसलाई 36 दिनको लागि जम्मा मूल्य कति पर्ला ?

13. 15 जना मानिसले 50 मीटर लामो पर्खाल 8 दिनमा बनाउँछन् भने, 16 जना मानिसले 12 दिनमा कति मि. लामो पर्खाल बनाउन सक्लान् ?

14. 20 जना मानिसले 80 मिटर लामो पर्खाल 8 दिनमा बनाउँछन् भने, 60 मिटरको पर्खाल 24 दिनमा बनाउन कति मानिस चाहिएलान् ?

15. भार्गवले नेपाल बैंक लिमिटेडमा रु.6,000 तीन वर्षको लागि जम्मा गर्दछन् । उनले तीन वर्षको अन्तमा जम्मा ब्याज रु.1,800 प्राप्त गर्दछन् भने, सोही साधारण ब्याज दरले 4 वर्षमा रु.10,000 को कति ब्याज प्राप्त गर्छन्, पत्ता लगाउनुहोस् ।

16. 6 जना मानिस र 8 जना केटाले 4 दिनमा 30 रोपनीको बाली काट्न सक्छन् । यदि 4 केटा बराबर 2 मानिसले बाली काट्न सक्ने क्षमता छ भने, 14 जना मानिसले र 8 जना केटाले 8 दिनमा कति रोपनी काट्न सक्लान् ?

17. 10 जना मानिसले प्रति दिन 7 घण्टाका दरले 2 दिनमा एउटा सडक निर्माण गर्न सक्छन् भने समान नाप भएको सडक 5 जना मनिसले 14 दिनमा प्रति दिनको कति घण्टाको दरले काम गर्दा निर्माण सम्पन्न गर्न सक्छन् ?

18. एउटा 54 मि. लामो पर्खाल 18 जना मानिसले 10 दिनमा बनाउन सक्छन् भने 66 मि.लामो पर्खाल 22 दिनमा निर्माण सम्पन्न गर्न समान क्षमता भएका मानिस कति जना चाहिएलान् ?

19. 20 जना मानिसले 40 मि. लामो र 20 मि. चौडा भएको पार्क बनाउन 25 दिन लाग्छ भने, 50 जना मानिसलाई 50 मि. लामो र 40 मि. चौडा भएको पार्क बनाउन कति दिन लाग्ला ?

20. यदि 25 जना मानिसले 30 दिनमा रु.5,00,000 कमाउँछन् भने

(क) 1 जना मानिसले 1 दिनमा कति कमाउँछन् ?

(ख) कति जना मानिसले 10 दिनमा रु.5,00,000 कमाउँछन् ?

(ग) 25 जना मानिसलाई रु.1,00,000 कमाउँन कति दिन लाग्ला ?

(घ) 5 जना मानिसले 40 दिनमा कति कमाउँछन् ?

परियोजना कार्य (Project Work)

हाम्रो दैनिक जीवनमा प्रयोग भइरहेका प्रत्यक्ष विचरण र अप्रत्यक्ष विचरणसम्बन्धी 3 र 3 ओटा उदाहरणलाई खोजी गरी टिपोट गर्नुहोस् र उक्त टिपोटलाई कक्षामा प्रस्तुत गर्नुहोस् ।

उत्तर

1. उत्तर शिक्षकलाई देखाउनुहोस् । 2. 19 ओटा 3. 75 मिनेट 4. 8 घण्टा
5. 5 जना 6. 8 दिन 7. 50 जना 8.6 km/hr 9. रु.1720
10. रु.20,000 11. -क) रु.700 (ख) रु.31,500 (ग) 12.5% ले बढी
12. (क) 700 के.जी.(ख) रु.42,000 13. 80 मि. 14. 5 जना
15. रु.4,000 16. 108 रोपनी 17. 2 घण्टा 18.10 जना
19. 25 दिन 20. (क) रु. 666.67 (ख) 75 जना (ग) 6 दिन
(घ) रु.1,33,333.33

पाठ 7

साधारण ब्याज
(Simple Interest)

7.0 पुनरवलोकन (Review)

हरिलाई व्यावसायिक तरिकाबाट बाख्रापालन गर्नका लागि केहि रकम आवश्यक पर्‍यो । उनले आफ्नो टोलको बचत समूहबाट व्यवसायको लागि अपुग रकम रु.5,000 ऋण लिने निधो गरे । उक्त बचत समूहले पनि उनलाई रु.100 को एक वर्षको ब्याज रु.10 का दरले 3 वर्षको लागि ऋण दिने निर्णय गर्‍यो । यसका आधारमा सोधिएका प्रश्नमा छलफल गर्नुहोस् ।

(क) रु.100 को 1 वर्षको ब्याज कति रहेछ ?

(ख) रु.500 को 1 वर्षको ब्याज कति हुन्छ ?

(ग) रु.1,000 को 1 वर्षको ब्याज कति हुन्छ ?

(घ) रु.5,000 को 1 वर्षको ब्याज कति हुन्छ ?

(ङ) रु.5,000 को 3 वर्षको ब्याज कति हुन्छ ?

(च) तीन वर्षको अन्त्यमा उनले आफूले लिएको ऋण रकम र ब्याजसहित जम्मा कति बुझाउनु पर्ला ?

7.1 साधारण ब्याज (Simple Interest)

क्रियाकलाप 1

भूमिकाले नेपाल बैङ्कमा रु.5,000 बचत खातामा जम्मा गरिछन् । 2 वर्षपछि उनलाई बैङ्कले रु.800 थपेर रु.5,800 फिर्ता दिएछ । यसका आधारमा सोधिएका प्रश्नमा छलफल गर्नुहोस् ।

(क) भूमिकाले बैङ्कमा जम्मा गरेको रकमलाई के भनिन्छ ?

(ख) बैङ्कले थपेर दिएको रकमलाई के भनिन्छ ?

(ग) कति समयका लागि जम्मा गरिएको थियो ?

(घ) बैङ्कले रु.5,000 मा रु.800 थपेर दिएको जम्मा रकम रु.5,800 लाई के भनिन्छ ?

(ङ) रु.5,000 को 2 वर्षको ब्याज रु.800 हुन्छ भने रु.100 को 1 वर्षको ब्याज कति हुन्छ ?

बैङ्कमा जम्मा गरेको रकम रु.5,000 लाई मूलधन वा सावाँ (P) भनिन्छ । बैङ्कले थपेर दिएको रकम रु.800 लाई ब्याज (I) भनिन्छ । भूमिकाले 2 वर्ष समय (T) अवधिका लागि रकम जम्मा गरेकी थिइन् । उनलाई बैङ्कले थपेर दिएको जम्मा रकम रु.5,800 लाई मिश्रधन (A) भनिन्छ ।

यहाँ, रु.5,000 को 2 वर्षको ब्याज रु.800 हुन्छ ।

रु.1 को 2 वर्षको ब्याज रु. $\frac{800}{5000}$ हुन्छ ।

रु.1 को 1 वर्षको ब्याज रु. $\frac{800}{5000\times2}$ हुन्छ ।

रु.100 को 1 वर्षको ब्याज रु. $\frac{800\times100}{5000\times2}$ = रु.8 हुन्छ ।

यहाँ,

रु.100 को 1 वर्षको ब्याज रु.8 हुन्छ । प्रति रु.100 को 1 वर्षको ब्याजलाई नै ब्याजदर (Interest rate – R) भनिन्छ । ब्याजदरलाई प्रतिशतमा लेखिन्छ, यहाँ, R = 8% हुन्छ । तसर्थ प्रतिवर्ष 8% ब्याजदरको अर्थ रु.100 को 1 वर्षको ब्याज रु.8 हुन्छ ।

क्रियाकलाप 2

तलको अवस्थाको अध्ययन गरी छलफल गर्नुहोस् :

(क) सन्देशकी आमाले एउटा किराना पसल खोल्ने निधो गरिन् । त्यसका लागि उनले वाणिज्य बैङ्कबाट 3 वर्षका लागि 12% प्रतिवर्ष ब्याजका दरले रु.50,000 ऋण लिएकी रहिछन् । अब उनले 3 वर्षपछि उक्त बैङ्कलाई कति ब्याज तिर्नुपर्छ, होला ?

यहाँ 12% प्रतिवर्ष ब्याजदरको अर्थअनुसार,

रु.100 को 1 वर्षको ब्याज रु.12 हुन्छ ।

रु.1 को 1 वर्षको ब्याज रु. $\frac{12}{100}$ हुन्छ ।

रु. 50,000 को 1 वर्षको ब्याज रु. $\frac{50,000\times12}{100}$ हुन्छ ।

रु.50,000 को 3 वर्षको ब्याज रु. $\frac{50,000\times3\times12}{100}$ हुन्छ ।

= रु.18,000

अतः सन्देशकी आमाले 3 वर्षमा रु.18,000 ब्याज तिर्नुपरेछ ।

(ख) यदि T वर्षका लागि R% प्रतिवर्ष ब्याजदरले रु.P ऋण लिइएको हो भने कति रकम ब्याज तिर्नुपर्ने हुन्छ ?

यहाँ, R% प्रतिवर्ष ब्याजदरको अर्थअनुसार,

रु.100 को 1 वर्षको ब्याज रु.R हुन्छ ।

रु.1 को 1 वर्षको ब्याज रु.$\frac{R}{100}$ हुन्छ ।

रु.1 को T वर्षको ब्याज रु.$\frac{T\times R}{100}$ हुन्छ ।

रु.P को T वर्षको ब्याज रु.$\frac{P\times T\times R}{100}$ हुन्छ ।

$\therefore$ ब्याज (I) = $\frac{P\times T\times R}{100}$ हुन्छ ।

हामीलाई केही सामान किन्न वा व्यापार व्यवसाय गर्न वा हाम्रा आवश्यकताहरू पूरा गर्न आफूसँग भएको रकम अपुग भएमा वित्तिय संघसंस्थाबाट ऋण लिनुपर्ने हुन्छ । ती संस्थाहरूले रकम ऋण दिएवापत निश्चित समयपछि केही थप रकम लिन्छन् । सो थप रकमलाई ब्याज (Interest) भनिन्छ । यदि हामीले बैङ्कमा केही रकम जम्मा गर्छौं भने बैङ्कले पनि यसमा थप रकम दिन्छ । सो थप रकमलाई पनि ब्याज भनिन्छ ।

साधारण ब्याज सम्बन्धी शब्दावलीहरू

- मूलधन वा सावाँ (P) : ऋण लिएको वा दिएको रकम वा वित्तीय संस्थामा बचत गरिएको रकमलाई मूलधन वा सावाँ (P) भनिन्छ ।
- ब्याज (I) : सावाँमा कुनै निश्चित अवधि पछि थप हुने रकमलाई ब्याज (I) भनिन्छ ।
- ब्याजदर (R) : रु.100 को 1 वर्षको ब्याजलाई नै ब्याजदर (R) भनिन्छ ।
- समय (T) : कुनै व्यक्तिले एउटा निश्चित अवधिका लागि ऋण लिएको वा दिएको हुन्छ । यो निश्चित अवधिलाई समय (T) भनिन्छ ।
- मिश्रधन (A) : सावाँ र ब्याज गरी एकमुष्ट हुन आउने रकमलाई मिश्रधन भनिन्छ ।

उदाहरण 1

सोमायाले एउटा सहकारीबाट 10% प्रतिवर्ष ब्याजका दरले तरकारी खेतीका लागि रु.20,000 ऋण लिएकी रहिछन् । उनले दुई वर्षमा सहकारीलाई कति ब्याज तिर्नुपर्छ, होला ? ऐकिक नियमबाट पत्ता लगाउनुहोस् ।

समाधान

यहाँ, 10% प्रतिवर्ष ब्याजदरको अर्थअनुसार,

रु.100 को 1 वर्षको ब्याज रु.10 हुन्छ ।

रु.1 को 1 वर्षको ब्याज रु.$\frac{10}{100}$ हुन्छ ।

रु. 20,000 को 1 वर्षको ब्याज रु.$\frac{10\times20,000}{100}$ हुन्छ ।

रु.20,000 को 2 वर्षको ब्याज रु.$\frac{10\times20,000\times2}{100}$ हुन्छ ।

= रु.4,000

अतः सोमायाले दुई वर्षमा रु.4,000 ब्याज तिर्नुपरेछ ।

उदाहरण 2

सन्तमानले पशुपालन व्यवसाय सुरु गर्नका लागि बैङ्कबाट रु.5,000 प्रतिवर्ष 10% का दरले ऋण लिएछन् । उनले 3 वर्ष 6 महिनापछि उक्त रकमको कति रकम ब्याज तिर्नुपर्छ ?

समाधान

यहाँ

साँवा (P) = रु.5,000

ब्याजदर (R) = 10%

समय (T) = 3 वर्ष 6 महिनामा = $(3 + \frac{6}{12})$ वर्ष = 3.5 वर्ष

ब्याज (I) = ?.

यहाँ, हामीलाई थाहा छ ब्याज (I) = $\frac{P\times T\times R}{100}$

$$= \frac{(5,000 \times 3.5 \times 10)}{100}$$

= रु.1,750

अतः सन्तमानले 3 वर्ष 6 महिनापछि ब्याज (I) = रु.1,750 तिर्नुपर्छ ।

उदाहरण 3

मञ्जुराले 10% वार्षिक ब्याजदरले 3 वर्षमा ब्याजबापत रु.2400 तिर्नुपर्छ भने उनले कति रकम ऋण लिएकी रहिछन् ?

समाधान,

यहाँ,

ब्याजदर (R) = 10%

समय (T) = 3 वर्ष

ब्याज (I) = रु.2400

मानौँ, मञ्जुराले ऋणबापत लिएको रकम = रु.P

यहाँ, हामीलाई थाहा छ,

ब्याज (I) = $\frac{P\times T\times R}{100}$

or, 2400 = $\frac{P\times 3\times 10}{100}$

or, 30 × P = 2400×100

or, P = $\frac{2400\times 100}{30}$

∴P = रु.8,000

अतः मञ्जुराले ऋण लिएको रकम (P) = रु.8,000 रहेछ ।

अभ्यास 7.1

1. तलका प्रश्नको छोटो उत्तर दिनुहोस् :

a) ब्याज भनेको के हो ?

b) सावाँ भनेको के हो ?

c) ब्याजदर भन्नाले के बुझिन्छ ?

d) 30 महिनालाई वर्षमा लेख्नुहोस् ।

2. ऐकिक नियमबाट साधारण ब्याज (I) पत्ता लगाउनुहोस् :

(क) सावाँ = रु.500. ब्याजदर (R) = 10% समय = 3 वर्ष

(ख) सावाँ = रु.5,200. ब्याजदर (R) = 12% समय = 5 वर्ष

(ग) सावाँ = रु.3,300. ब्याजदर (R) = 7.5% समय = 3 वर्ष 6 महिना

(घ) सावाँ = रु.1,200. ब्याजदर (R) = 3% समय = 3 वर्ष 3 महिना

3. समय (T) पत्ता लगाउनुहोस् :

(क) सावाँ = रु.1,260 ब्याजदर (R) = 5% ब्याज (I) = रु.378

(ख) सावाँ = रु.1,250 ब्याजदर (R) = 13% ब्याज (I) = रु.650

(ग) सावाँ = रु.4,500 ब्याजदर (R) = 4% ब्याज (I) = रु.900

4. ब्याजदर (R) पत्ता लगाउनुहोस् :

(क) सावाँ = रु.7,200. समय (T) = 5 वर्ष ब्याज = रु.1,080

(ख) सावाँ = रु.6,000. समय (T) = 3 वर्ष 6 महिना ब्याज = रु.1,155

(ग) सावाँ = रु.2,160. समय (T) = 4 वर्ष ब्याज = रु.648

5. सावाँ (P) पत्ता लगाउनुहोस् :

(क) ब्याजदर (R) = 9% समय (T) = 9 वर्ष ब्याज = रु.810

(ख) ब्याजदर (R) = 4.8% समय = 1 महिना ब्याज = रु.3996

(ग) ब्याजदर (R) = $6\frac{2}{3}$% समय (T) = 5 वर्ष ब्याज = रु.400

6. गङ्गाले वार्षिक 7% का दरले ब्याज पाउने गरी रु.3,500 नेपाल बैङ्क लिमिटेडमा जम्मा गरिन् भने 4 वर्षपछि उनले कति ब्याज पाउँछिन्, पत्ता लगाउनुहोस् ।

7. सन्देशले वार्षिक 6.6% ब्याजदरमा बैङ्कबाट रु.18,000 ऋण लिए भने 30 महिनापछि उनले बैङ्कमा कति ब्याज बुझाउनुपर्ला ?

8. भार्गवले राष्ट्रिय वाणिज्य बैङ्कबाट कुनै रकमको 4 वर्षपछि रु.550 ब्याज पाए। यदि उनले 5.5% ब्याजदरमा उक्त रकम ब्याजवापत पाएका रहेछन् भने उनले कति रकम जम्मा गरेका रहेछन्, पत्ता लगाउनुहोस्।

9. सरिस्माले रु.7,600 बैङ्कमा राखे बापत बैङ्कले 3 वर्षपछि रु.1,254 ब्याज दियो भने ब्याजदर कति रहेछ, पत्ता लगाउनुहोस्।

10. 10% ब्याजदरले रु.1,080 को 4 वर्षमा आउने ब्याज बराबरको रकम पाउनका लागि रु.900 लाई 12% ब्याजदरले कति वर्ष जम्मा गर्नुपर्ने हुन्छ ?

उत्तर

1. उत्तर शिक्षकलाई देखाउनुहोस्। 2. (क) रु.150 (ख) रु.3,120 (ग) रु.866.25 (घ) रु.117 3. (क) 6 वर्ष (ख) 4 वर्ष (ग) 5 वर्ष
4. (क) 3% (ख) 5.5% (ग) 7.5%
5. (क) रु.1,000 (ख) रु.9,990 (ग) रु.1,200 6. रु.980 7. रु.2,970
8. रु.2,500 9. 5.5% 10. रु.432, 4 वर्ष

7.2 मिश्रधन (Amount)

क्रियाकलाप 3

तलको अवस्था अध्ययन गरी छलफल गर्नुहोस् :

(अ) लाक्पाले आफ्नो मासिक आम्दानीबाट बचत गरेको रकम रु.10,000 नेपाल बैङ्कमा वार्षिक 8% ब्याजदर पाउने गरी जम्मा गरेछन्। यदि उनले उक्त रकम 3 वर्षको लागि जम्मा गरेका रहेछन् भने

(क) उनले कति ब्याज प्राप्त गर्छन् ?

(ख) सावाँ रकम र ब्याज गरी एकमुस्ट रूपमा कति रकम प्राप्त गर्छन् ?

यहाँ,

सावाँ (P) = रु.10,000

ब्याजदर (R) = 8%

समय (T) = 3 वर्ष

(क) उनले प्राप्त गर्ने ब्याज (I) = ?.

हामीलाई थाहा छ,

ब्याज (I) = $\frac{(P\times T\times R)}{100} = \frac{10000\times 3\times 8}{100}$

= रु.2400

(ख) सावाँ रकम र ब्याज गरी एकमुष्ट रकम = सावाँ + ब्याज = 10,000 + 2400

= रु.12,400

यहाँ सावाँ र ब्याजको एकमुष्ट रकम रु.12,400 नै मिश्रधन हो ।

निश्चित समयपश्चात् कुनै पनि सावाँ रकममा ब्याज थप गरी एकमुष्ट प्रदान गरिने रकमलाई मिश्रधन भनिन्छ । यसलाई A ले जनाइन्छ ।

∴मिश्रधन (A) = सावाँ (P) + ब्याज (I) हुन्छ ।

(आ) यदि रु.P रकमको T वर्षका लागि R% प्रतिवर्ष ब्याजदरले ब्याज रु.I हुन्छ भने मिश्रधन कति हुन्छ ?

यहाँ,

मिश्रधन = सावाँ + ब्याज

$A = P + I$ …………..(i)

हामीलाई थाहा छ,

$I = \frac{PTR}{100}$ ………..(ii)

(i) र (ii) लाई मिलाउँदा,

$A = P + \frac{PTR}{100}$

$\therefore A = P\left(1 + \frac{TR}{100}\right)$

$= P\left(\frac{100 + TR}{100}\right)$

उदाहरण 1

रु. **5,000** लाई **8%** ब्याजदरले **2** वर्ष बैङ्कमा राख्दा आउने ब्याज र **2** वर्षपछि हुन आउने जम्मा रकम पत्ता लगाउनुहोस् ।

समाधान

यहाँ,

सावाँ (P) = रु.5,000

ब्याजदर (R) = 8%

समय (T) = 2 वर्ष

मिश्रधन (A) = P + I = ?

हामीलाई थाहा छ, ब्याज (I) = $\frac{PTR}{100}$

$= \frac{5000 \times 2 \times 8}{100}$

= रु.800

अब मिश्रधन (A) = P + I

= 5,000 + 800

= रु.5,800

अत: ब्याज = रु.800 र मिश्रधन = रु.5,800 हुन्छ ।

उदाहरण 2

राजकिशोरले पसलबाट नाफा गरेको रु.8,000 लाई वार्षिक 12% ब्याजदर पाउने गरी 3 वर्षका लागि कुनै बैङ्कमा जम्मा गरेछन् । अब 3 वर्षपछि उनले जम्मा कति रकम फिर्ता पाउँछन्, पत्ता लगउनुहोस् ।

समाधान

यहाँ,

ब्याजदर (R) = 12%

सावाँ (P) = रु.8,000

समय (T) = 3 वर्ष

मिश्रधन (A) = ?

हामीलाई थाहा छ,

मिश्रधन (A) = $P\left(\frac{100+TR}{100}\right)$

$= 8,000\left(\frac{100+3\times12}{100}\right)$

$= 8,000\left(\frac{136}{100}\right)$

= रु.10,880

अर्को तरिका,

ब्याज (I) = $\frac{P \times T \times R}{100}$

$= \frac{8000 \times 3 \times 12}{100}$

= रु.2880

मिश्रधन (A) = 8000 + 2880

= रु.10,880

अतः राजकिशोरले 3 वर्षपछि जम्मा रु.10,880 फिर्ता पाउँछन् ।

उदाहरण 3

40 महिनामा एकमुष्ट रु.2,375 प्राप्त गर्न 7.5% ब्याजदरले कति रकम जम्मा गर्नुपर्ला ?

समाधान

यहाँ,

समय (T) = 40 महिना = $\frac{40}{12}$ वर्ष= $\frac{10}{3}$ वर्ष

मिश्रधन (A) = रु.2,375

ब्याजदर (R) = 7.5%

सावाँ (P) = ?

हामीलाई थाहा छ,

मिश्रधन (A) = $P\left(\frac{100+TR}{100}\right)$

or, $2375 = P\left(\frac{100 + \frac{10}{3} \times 7.5}{100}\right)$

or, $P = \left(\frac{100 \times 2,375}{100 + \frac{10}{3} \times 7.5}\right) = \frac{2,37,500}{125}$

∴P = रु.1,900

अतः सावाँ (P) = रु.1,900

अभ्यास 7.2

1. मिश्रधन (A) पत्ता लगाउनुहोस् :

(क) सावाँ = रु.50,000	समय = 7 वर्ष	ब्याजदर (R) = 3%
(ख) सावाँ = रु.2,160	समय = 4 वर्ष	ब्याजदर (R) = 3.5%
(ग) सावाँ = रु.55,500	समय = 2 वर्ष	ब्याजदर (R) = 7.5%
(घ) सावाँ = रु.5,24,000	समय = 3 महिना	ब्याजदर (R) = 11%

2. करुणाले गाईपालनका लागि बैङ्कबाट 12% ब्याजदरमा रु.2,00,000 लिइन्। यदि उनले 30 महिनापछि सावाँ र ब्याज गरी एकमुष्ट रकम तिरिन् भने जम्मा कति रुपियाँ तिरिन् होला ?

3. रु. 35,000 को 3% ब्याजदरले 54 महिनामा जम्मा कति रकम होला, पत्ता लगाउनुहोस्।

4. 4 महिनामा ब्याजबापत रु.610 प्राप्त गर्न 10% ब्याजदरले कति रकम बैङ्कमा जम्मा गर्नुपर्ला ?

5. 5% ब्याजका दरले 4 वर्ष 6 महिनामा कति रुपियाँ जम्मा गर्दा मिश्रधन रु.2,51,225 हुन्छ, पत्ता लगाउनुहोस् ।

6. वार्षिक 5.5% ब्याजदरले रु.7,500 जम्मा गर्दा 42 महिनापछि जम्मा कति रकम प्राप्त होला, पत्ता लगाउनुहोस्।

7. आदिराले बार्षिक 5% ब्याजदरले रु.40,000 बैङ्कमा वचत गर्दा आउने ब्याजको 5% आयकर तिर्नुपर्छ भने 4 बर्षपछि उनले जम्मा कति रकम प्राप्त गर्छिन् होला, पत्ता लगाउनुहोस्।

8. रु. 75,000 को वार्षिक 5.6% ब्याजदरले 6 महिनामा प्राप्त हुने ब्याजमा बैङ्कले 5% कर लिन्छ भने 6 महिनापछि एकमुष्ट जम्मा कति रकम प्राप्त होला ?

9. रु. 10,800 को वार्षिक 10% ब्याजदरमा 4 वर्षमा आउने ब्याजको 5% कर तिर्नुपर्छ भने 4 वर्षपछि एकमुष्ट कति रकम प्राप्त होला ?

10. हरिले वैदेशिक रोजगारमा मलेसिया जानका लागि वाणिज्य बैङ्कबाट रु.3,00,000 ऋण 12% ब्याजदरले 2 वर्ष 6 महिनाका लागि ऋण लिएछ।

    (क) हरिले तिर्नु पर्ने साधारण ब्याज निकाल्नुहोस्।

    (ख) ऋण चुक्ता गर्दा एकमुष्ट तिर्नु पर्ने रकम पत्ता लगाउनुहोस्।

परियोजना कार्य

आफ्नो नजिकैको वित्तीय संस्था वा बैंकमा जानुहोस् वा इन्टरनेटबाट खोजी गरी फरक फरक खाताको ब्याजदरको जानकारी लिनुहोस् र कुन खातामा रकम जम्मा गर्दा वार्षिक रूपमा बढी ब्याज पाइदो रहेछ ? पत्ता लगाउनुहोस् र कक्षाकोठामा प्रस्तुत गर्नुहोस् ।

उत्तर

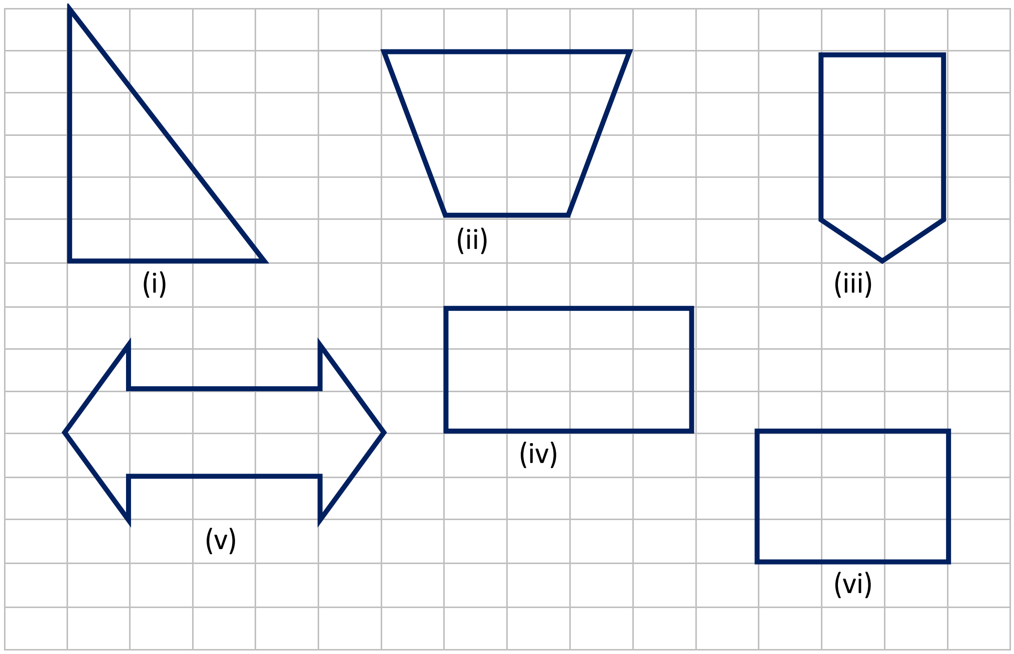
1. (क) रु.60,500	(ख) रु.2462.40	(ग) रु.63,825	(घ) रु.5,38,410
2. रु.2,60,000	3. रु.39725	4. रु.18,300	
5. रु.205081.63	6. रु.8,943.75		
7. रु.47,600	8. रु.76,995	9. रु.14,904	
10. -क) रु.90,000	(ख) रु.3,90,000		

पाठ 8

क्षेत्रफल र आयतन
(Area and Volume)

8.0 पुनरवलोकन (Review)

तल वर्गाङ्कित कागजमा दिइएका आकृतिहरूको क्षेत्रफल कति होला, जोडीमा छलफल गर्नुहोस् । प्राप्त निष्कर्षलाई कक्षामा प्रस्तुत गर्नुहोस् ।



क्षेत्रफल भनेको समतल सतहमा कुनै वस्तुको सतहले ओगटेको ठाउँ हो ।

8.1 त्रिभुज र चतुर्भुजको क्षेत्रफल (Area of Triangles and Quadrilaterals)

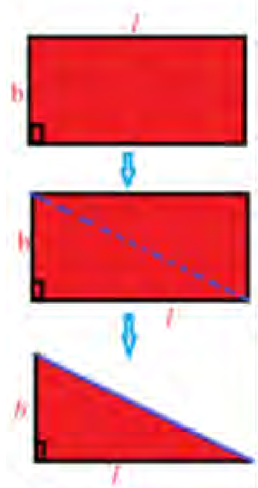
8.1.1 त्रिभुजहरूको क्षेत्रफल (Area of Triangles)

(i) समकोण त्रिभुजको क्षेत्रफल (Area of Right angled Triangle)

क्रियाकलाप 1

एउटा आयतकार पेपर लिनुहोस् । जसको लम्बाइ (l) र चौडाइ (b) छ, त्यसैले आयतको क्षेत्रफल $= l \times b$ वर्ग एकाइ हुन्छ ।

दोस्रो चित्रमा देखाए जस्तै आयत भित्र एउटा विकर्ण लिनुहोस्, कागजलाई पट्याउनुहोस् र पट्याइएको भाग काट्नुहोस् । अब, आयत दुईओटा समकोण त्रिभुजमा विभाजन हुन्छ ।



अब पहिलेको त्रिभुज माथि काटिएको भाग मिलाएर राख्नुहोस् । ठ्याक्कै पहिलेको त्रिभुजसँग मिल्छ । त्यसकारण आयतको क्षेत्रफल = 2 × समकोण त्रिभुजको क्षेत्रफल

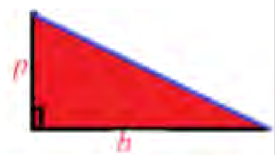
∴ समकोण त्रिभुजको क्षेत्रफल $= \frac{1}{2}$ आयतको क्षेत्रफल

$$= \frac{1}{2} \times l \times b$$

अत :

समकोण त्रिभुजको आधार b र लम्ब p भए,

क्षेत्रफल $(A) = \frac{1}{2} \times b \times p$ हुन्छ ।

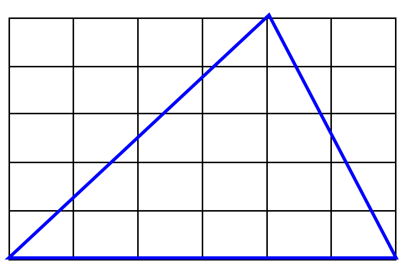


नोटः समकोणी समद्विबाहु त्रिभुजमा दुई भुजाहरू लम्ब र आधार बराबर हुने भएकाले, समकोणी समद्विबाहु त्रिभुजको क्षेत्रफल

$(A) = \frac{p^2}{2}$ वा $\frac{b^2}{2}$ हुन्छ ।

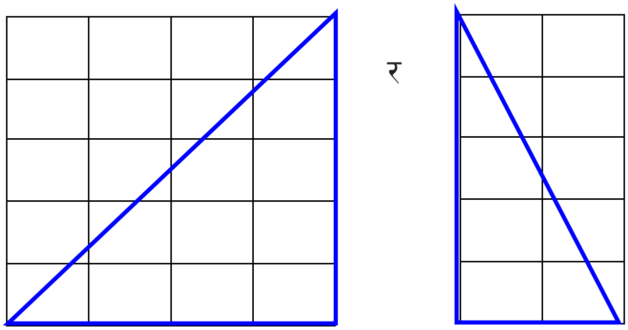
क्रियाकलाप 2

जोडीमा एक एकओटा आयताकार वर्गाङ्कित कागज लिनुहोस् र चित्रमा दिइएको जस्तै गरी एक एकओटा समान नापका त्रिभुज बनाउनुहोस् । अब ती त्रिभुजको क्षेत्रफल कति होला ? जोडीमा छलफल गर्नुहोस् ।



त्रिभुजको क्षेत्रफल पत्ता लगाउन निम्नलिखित क्रियाकलाप गर्नुहोस् ।

तपाईंले बनाएको त्रिभुजलाई चित्रमा देखाएको जस्तै गरी दुई समकोणी त्रिभुजमा विभाजन गर्नुहोस् । अब समकोणी त्रिभुजको कर्णलाई विकर्ण मानेर आयतकार कागजको दुवै टुक्रालाई पट्याउनुहोस् । के पाउनुभयो, छलफल गर्नुहोस् ।



पहिलो टुक्रा   दोस्रो टुक्रा

अब दुवै त्रिभुजको अलग अलग क्षेत्रफल निकाल्नुहोस् ।

पहिलो टुक्राबाट,

त्रिभुजको क्षेत्रफल = $\frac{1}{2}$ आयतकार कागज (टुक्रा पारेपछि) को क्षेत्रफल

= $\frac{1}{2} \times 4 \times 5 = 10$ वर्ग एकाइ

त्यसै गरी दोस्रो टुक्राबाट,

त्रिभुजको क्षेत्रफल = $\frac{1}{2}$ आयतकार कागज (टुक्रा पारेपछि) को क्षेत्रफल

= $\frac{1}{2} \times 2 \times 5 = 5$ वर्ग एकाइ

अत : त्रिभुजको जम्मा क्षेत्रफल =10+5=15 वर्ग एकाइ

अब, साथीले बनाएको चित्रबाट आयतकार कागज (टुक्रा नपारिएको) को क्षेत्रफल पत्ता लगाउनुहोस् र तपाईंले पत्ता लगाएको त्रिभुजको क्षेत्रफलसँग तुलना गर्नुहोस् ।

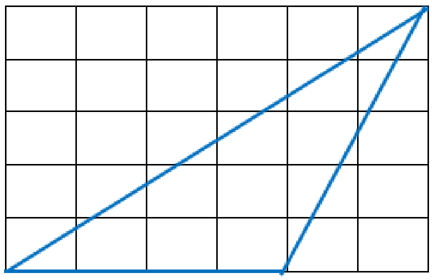
यहाँ,

आयतकार कागज (टुक्रा नपारिएको) को क्षेत्रफल = आधार × उचाइ = $6 \times 5 = 30$ वर्ग एकाइ

त्रिभुज र आयतकार कागजको क्षेत्रफललाई तुलना गर्दा,

त्रिभुजको क्षेत्रफल = $\frac{1}{2}$ आयतको क्षेत्रफल हुन्छ ।

अब तल चित्रमा दिइएको त्रिभुजको क्षेत्रफल कति होला, साथीसँग छलफल गरी पत्ता लगाउनुहोस् ।



क्रियाकलाप 3

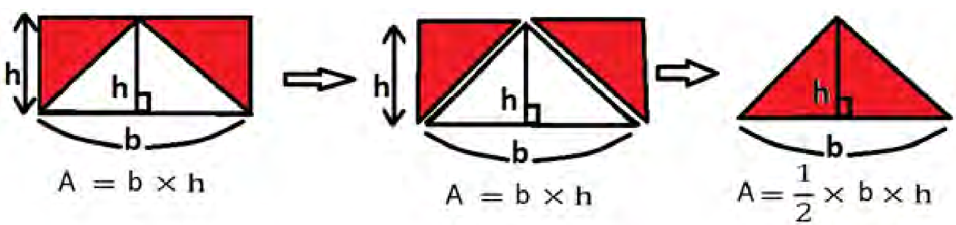
एउटा निश्चित नापको आयतकार पेपर लिनुहोस् । जसको आधार (b) र उचाइ (h) छ भनि मान्नुहोस्,

त्यसैले आयतको क्षेत्रफल = $b \times h$ वर्ग एकाई हुन्छ ।

अब, पहिलो चित्रमा देखाए जस्तै आयत भित्र एउटा त्रिभुज निर्माण गर्नुहोस् र त्रिभुजको शीर्षबिन्दुबाट आधारमा लम्ब खिच्नुहोस् ।

चित्रमा देखाइए जस्तै त्रिभुजका शीर्षविन्दुहरूबाट पेपरलाई पट्याउनुहोस् र पट्याइएको भाग काट्नुहोस् । अब पहिलेको त्रिभुज माथि काटिएको भाग मिलाएर राख्नुहोस् । ठ्याक्कै पहिलेको त्रिभुजसँग मिल्छ । त्यसकारण, आयतको क्षेत्रफल = 2 × त्रिभुजको क्षेत्रफल

∴ त्रिभुजको क्षेत्रफल = $\frac{1}{2}$ आयतको क्षेत्रफल = $\frac{1}{2} \times b \times h$



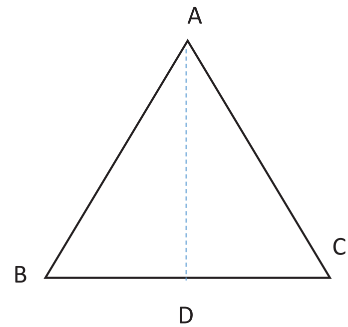
आधारको लम्बाइ b र उचाइ h भएको त्रिभुजको क्षेत्रफल = $\frac{1}{2}$ आधार × उचाइ

= $\frac{1}{2} \times b \times h$ हुन्छ ।

(ii) समबाहु त्रिभुजको क्षेत्रफल (Area of Equilateral Triangle)

क्रियाकलाप 4

एउटा फोटोकपी पेपर लिनुहोस् र त्यसमा निश्चित नाप भएको समबाहु त्रिभुज बनाउनुहोस् । अब तपाईंले बनाएको त्रिभुजलाई कैँचीको सहायताले काटेर निकाल्नुहोस् । चित्रमा देखाइएको जस्तै गरी त्रिभुजको कुनै एउटा शीर्षकोणलाई आधा बनाउने गरी पट्याउनुहोस् । यसरी पट्याउँदा बन्ने रेखाखण्डले उक्त शीर्षकोणमा बन्ने दुई कोण र सो त्रिभुजको आधार भुजाबिचको सम्बन्ध कस्तो होला, साथीसँग छलफल गर्नुहोस् ।



यहाँ,

सँगैको चित्र समबाहु त्रिभुज हो । यसमा मानौँ भुजाको लम्बाइ 'a' छ । A बाट BC मा लम्ब AD खिच्नुहोस् । अब आधार BC लाई AD ले आधा गर्छ । [समबाहु त्रिभुजको शीर्षकोणको अर्धकले आधार भुजालाई समद्विभाजन गर्छ ।]

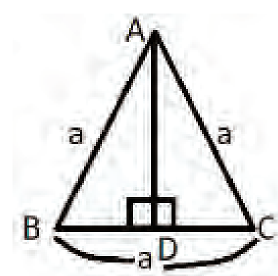
$\therefore BD = DC = \frac{a}{2}$ हुन्छ ।

पाइथागोरस साध्यअनुसार,

$AD^2 = AC^2 - CD^2$

अथवा, $AD = \sqrt{AC^2 - CD^2}$

$= \sqrt{a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2}$



$= \sqrt{\frac{4a^2 - a^2}{4}}$

$= \frac{\sqrt{3}}{2}a$

अब त्रिभुजको क्षेत्रफल (A) = $\frac{1}{2}$ × आधार × उचाइ

$= \frac{1}{2} \times a \times \frac{\sqrt{3}}{2}a = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2$

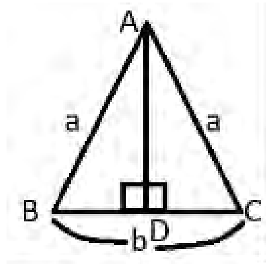
अत : समबाहु त्रिभुजको क्षेत्रफल (A) = $\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$

(ii) समद्विबाहु त्रिभुजको क्षेत्रफल (Area of Isosceles Triangle)

क्रियाकलाप 5

दिइएको चित्र समद्विबाहु त्रिभुज हो । मानौँ, यसमा AB = AC = a र BC = b छ । A बाट BC मा लम्ब AD खिचौं । जसले आधार BC लाई आधा गर्छ । [∴समद्विबाहु त्रिभुजको शीर्षकोणबाट आधारमा खिचिएको लम्बले आधारभुजालाई समद्विभाजन गर्छ ।]

∴ BD = DC = $\frac{b}{2}$ हुन्छ ।



पाइथागोरस साध्य अनुसार,

$AD^2 = AC^2 - CD^2$

अथवा, $AD = \sqrt{AC^2 - CD^2} = \sqrt{a^2 - \left(\frac{b}{2}\right)^2}$

$= \sqrt{\frac{4a^2-b^2}{4}} = \frac{\sqrt{4a^2-b^2}}{2}$

अब, त्रिभुजको क्षेत्रफल $(A) = \frac{1}{2} \times$ आधार $\times$ उचाई $= \frac{1}{2} \times b \times \frac{\sqrt{4a^2-b^2}}{2} = \frac{b\sqrt{4a^2-b^2}}{4}$

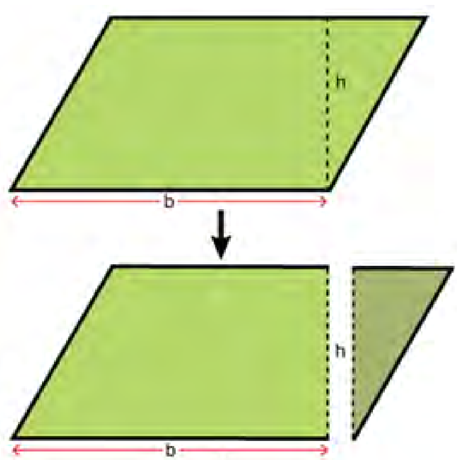
अत : समद्विबाहु त्रिभुजको क्षेत्रफल $(A) = \frac{b\sqrt{4a^2-b^2}}{4}$

8.1.2 विभिन्न चतुर्भुजहरूको क्षेत्रफल (Area of different Quadrilaterals)

(i) समानान्तर चतुर्भुजको क्षेत्रफल (Area of a Parallelogram)

क्रियाकलाप 6

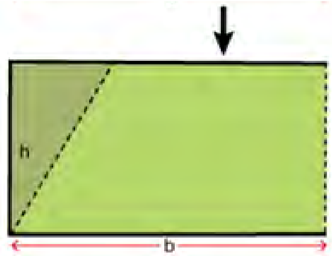
कार्डबोर्डको प्रयोग गरेर चित्रमा देखाए जस्तै आधार b र उचाइ h भएको एउटा समानान्तर चतुर्भुज बनाउनुहोस् ।



चित्रमा देखाए झैं तल दायाँपट्टिको शीर्षबिन्दुबाट लम्ब हुने गरी कार्डबोर्डलाई पट्याउनुहोस् र पट्याइएको भागलाई काट्नुहोस् ।

अब, काटेको भाग (त्रिभुज) लाई बायाँपट्टि ल्याई

चित्रमा जस्तै जोड्नुहोस् । अब, यो कस्तो आकृतिको बन्छ ?



यहाँ, आयतको लम्बाइ b र चौडाइ h छ । त्यसैले आयतको क्षेत्रफल = लम्बाइ × चौडाइ = b × h हुन्छ ।
यहाँ,

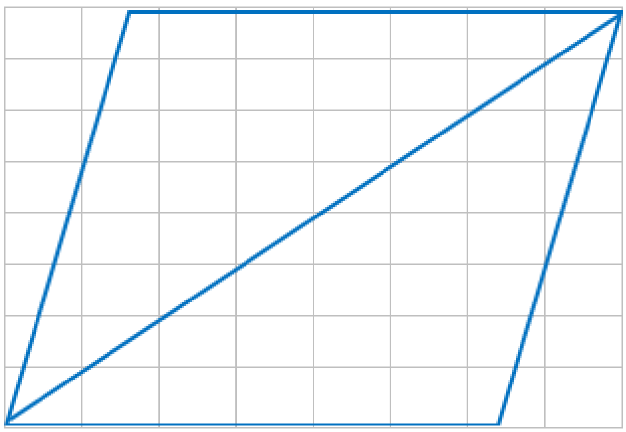
आयतको क्षेत्रफल = समानान्तर चतुर्भुजको क्षेत्रफल छ ।

∴ समानान्तर चतुर्भुजको क्षेत्रफल = आयतको क्षेत्रफल = b × h

अत: समानान्तर चतुर्भुजको क्षेत्रफल = आधार × उचाइ = b × h

क्रियाकलाप 7

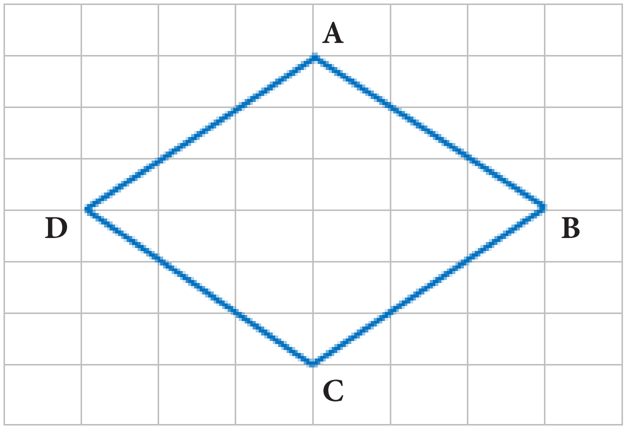
एउटा वर्गाङ्कित कागज लिनुहोस् । चित्रमा दिइएको जस्तै गरी उक्त वर्गाङ्कित कागजमा एउटा समानान्तर चतुर्भुज खिच्नुहोस् । अब तपाईंले बनाउनुभएको समानान्तर चतुर्भुजको क्षेत्रफल कति होला ? जोडीमा छलफल गर्नुहोस् ।



(ii) समबाहु चतुर्भुजको क्षेत्रफल (Area of a Rhombus)

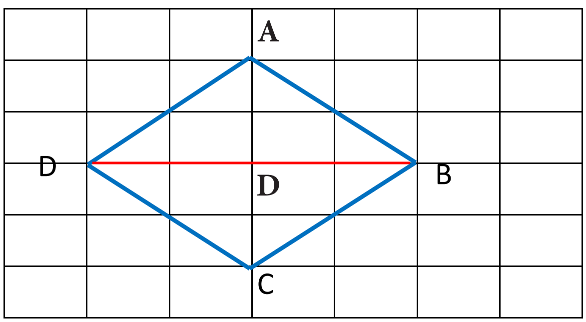
क्रियाकलाप 8

एउटा आयताकार वर्गाङ्कित कागज लिनुहोस् र चित्रमा दिइएको जस्तै गरी एउटा समबाहु चतुर्भुज बनाउनुहोस् । अब तपाईंले बनाएको समबाहु चतुर्भुजको क्षेत्रफल कति होला ? जोडीमा छलफल गर्नुहोस् ।



यहाँ,

एउटा विकर्ण BD खिच्नुहोस् । अब, तपाईंले बनाउनुभएको समबाहु चर्तुभुज दुईओटा त्रिभुजमा विभाजन भएको छ ।



तसर्थ समबाहु चतुर्भुजको क्षेत्रफल = त्रिभुज ABD को क्षेत्रफल + त्रिभुज CBD को क्षेत्रफल

$$= \frac{1}{2}\ 4 \times 2 + \frac{1}{2}\ 4 \times 2$$

$$= \frac{1}{2} \times 4\ (2+2) \quad (\because AO = OC = 2)$$

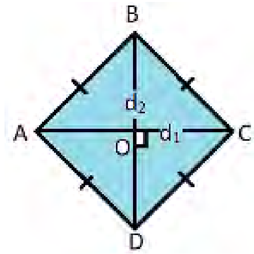
$$= \frac{1}{2} \times 4 \times 4$$

$$= \frac{1}{2} \times BD \times AC$$

यहाँ,

सँगैको चित्रमा समबाहु चतुर्भुज ABCD का विकर्णहरू AC (d_1) र BD (d_2) खिचिएको

छ । समबाहु चतुर्भुजका विकर्णहरू आपसमा लम्ब हुने गरी प्रतिच्छेदन हुने भएकोले AO ⊥ BD र CO ⊥ BD हुन्छ ।
अब, समबाहु चतुर्भुज ABCD को क्षेत्रफल (A) = ΔABD को क्षेत्रफल + ΔCBD को क्षेत्रफल



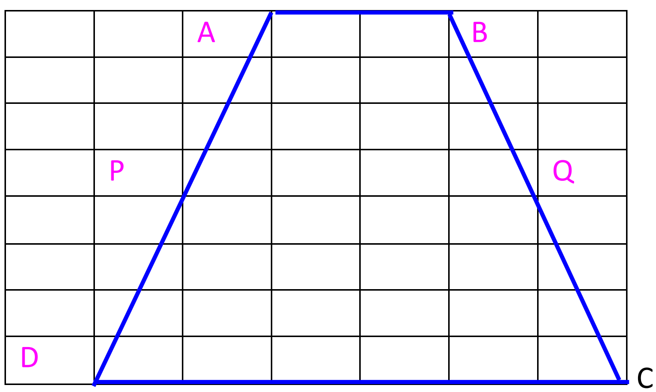
$$= \frac{1}{2} \times AO \times BD + \frac{1}{2} \times CO \times BD$$
$$= \frac{1}{2} \times BD\ (AO+CO)$$
$$= \frac{1}{2} \times BD \times AC$$
$$= \frac{1}{2} \times d_1 \times d_2$$

अतः समबाहु चतुर्भुजको क्षेत्रफल (A) = $\frac{1}{2} \times d_1 \times d_2 = \left(\frac{d_1 \times d_2}{2}\right)$ हुन्छ ।

(iii) समलम्ब चतुर्भुजको क्षेत्रफल (Area of a Trapezium)

क्रियाकलाप 9

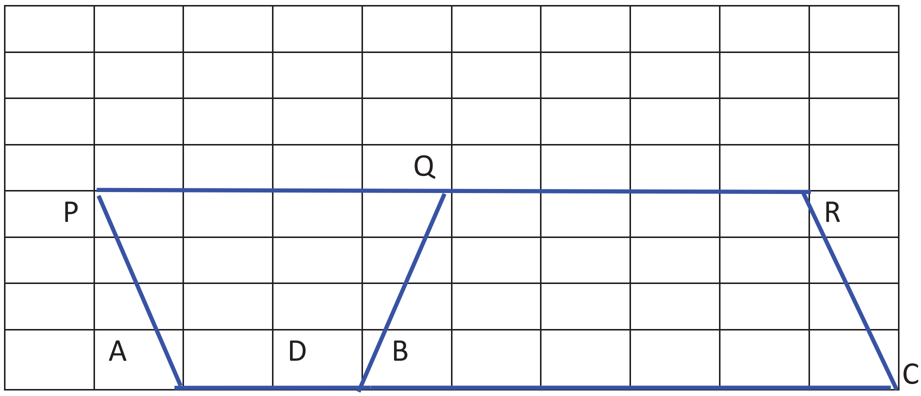
एक एकओटा वर्गाङ्कित कागज लिनुहोस् र चित्रमा दिइएको जस्तै गरी कुनै नाप भएको समलम्ब चतुर्भुज बनाउनुहोस् । अब तपाईंले बनाएको समलम्ब चतुर्भुजको क्षेत्रफल कति होला ? जोडीमा छलफल गर्नुहोस् ।



अब,

पादहरू (चित्रमा AD र BC) का मध्य बिन्दुलाई जोड्ने मध्यरेखा खिच्नुहोस् र चित्रमा

देखाएको जस्तै गरी तपाईंले बनाएको समलम्ब चतुर्भुजबाट समानान्तर चतुर्भुज बनाउनुहोस् ।



यहाँ,

समलम्ब चतुर्भुज ABCD को क्षेत्रफल = समानान्तर चतुर्भुज ACRP को क्षेत्रफल

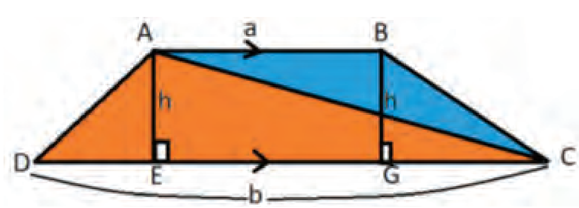
= आधार × उचाई

= (2 + 6) × 4

= (AB + DC) × उचाइको आधा हुन्छ ।

तसर्थ समलम्ब चतुर्भुजको क्षेत्रफल = $\frac{1}{2}$ समानान्तर भुजाहरूको योगफल × उचाइ

यहाँ सँगैको चित्रमा समलम्ब चतुर्भुज ABCD का भुजाहरू AB (a) र CD (b) समानान्तर छन् । AE = BG = h समलम्ब चतुर्भुजको उचाइ हो भने AC विकर्ण हो ।



अब समलम्ब चतुर्भुज ABCD को क्षेत्रफल (A) = ΔADC को क्षेत्रफल + ΔABC को क्षेत्रफल

$= \frac{1}{2} \times CD \times AE + \frac{1}{2} \times AB \times BG$

$= \frac{1}{2} \times b \times h + \frac{1}{2} \times a \times h$

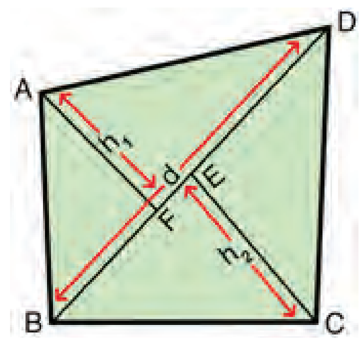
$$= \frac{1}{2} \times h \times (a + b)$$

अतः समलम्ब चतुर्भुजको क्षेत्रफल $(A) = \frac{1}{2} \times h \times (a + b)$

$= \frac{1}{2} \times$ उचाइ $\times$ समानान्तर भुजाको योगफल हुन्छ ।

(iv) चतुर्भुजको क्षेत्रफल (Area of Quadrilateral)

चित्रमा ABCD एउटा चतुर्भुज हो । चतुर्भुजको विकर्ण BD (d) हो भने शीर्षबिन्दुहरू A र C बाट विकर्ण BD मा लम्बहरू खिचिएका छन् । अतः ΔABD को उचाइ (AF) = h_1 र ΔCBD को उचाइ (CE) = h_2 छ ।



अब चतुर्भुज ABCD को क्षेत्रफल (A)=ΔABD को क्षेत्रफल + ΔCBD को क्षेत्रफल

$$= \frac{1}{2} \times BD \times AF + \times BD \times CE$$

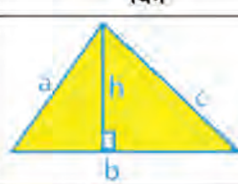
$$= \frac{1}{2} \times d \times h_1 + \frac{1}{2} \times d \times h_2$$

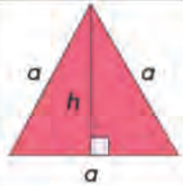
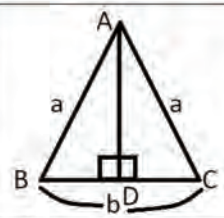
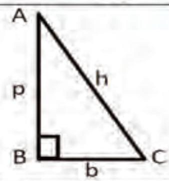
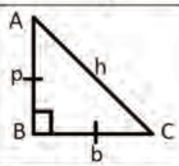
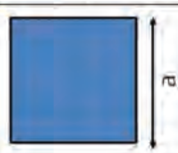
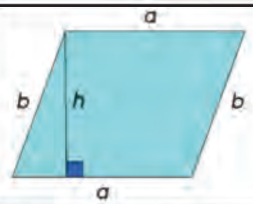
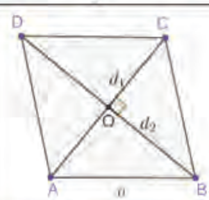
$$= \frac{1}{2} \times d \times (h_1 + h_2)$$

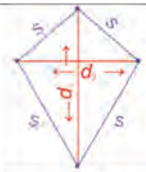
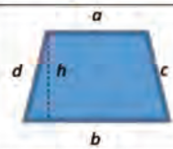
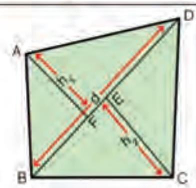
अतः चतुर्भुजको क्षेत्रफल $(A) = \frac{1}{2} \times d \times (h_1 + h_2)$

$= \frac{1}{2} \times$ विकर्ण $\times$ विकर्णमा खिचिएका लम्बहरूको योगफल हुन्छ ।

माथिका बहुभुजहरूको परिमिति र क्षेत्रफललाई निम्नानुसार तालिकामा प्रस्तुत गर्न सकिन्छ ।

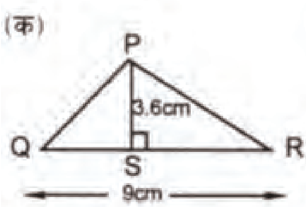
बहुभुजको नाम	चित्र	परिमिति	क्षेत्रफल
त्रिभुज		$P = a + b + c$	$A = \frac{1}{2} \times b \times h$

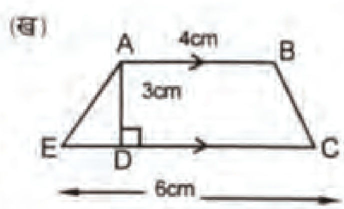
समबाहु त्रिभुज		$P = 3a$	$A = \frac{\sqrt{3}a^2}{4}$
समद्विबाहु त्रिभुज		$P = 2a + b$	$A = \frac{b\sqrt{4a^2 - b^2}}{4}$
समकोण त्रिभुज		$P = p + b + h$	$A = \frac{1}{2} \times p \times b$
समकोणी समद्विबाहु त्रिभुज		$p = b$ भएकोले $P = 2p + h$ वा $= 2b + h$	$A = \frac{p^2}{2}$ वा $\frac{b^2}{2}$
आयत		$P = 2(l + b)$	$A = l \times b$
वर्ग		$P = 4a$	$A = a^2$ वा विकर्ण d भए, $A = \frac{d^2}{2}$
समानान्तर चतुर्भुज		$P = 2(a + b)$	$A = b \times h$
समबाहु चतुर्भुज		$P = 4a$	$A = \frac{1}{2} \times d_1 \times d_2$

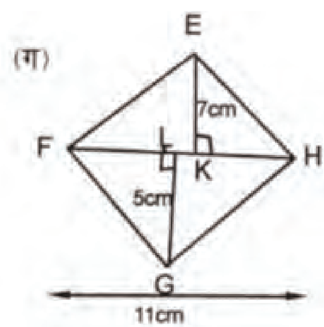
चङ्गा		$P = 2(S_1 + S_2)$	$A = \frac{1}{2} \times d_1 \times d_2$
समलम्ब चतुर्भुज		$P = a + b + c + d$	$A = \frac{1}{2} \times h \times (a + b)$
चतुर्भुज		$P = AB + BC + CD + AD$	$A = \frac{1}{2} \times d \times (h_1 + h_2)$

उदाहरण 1

दिइएका ज्यामितीय आकृतिहरूको क्षेत्रफल निकाल्नुहोस् । (नाप वास्तविक नापोमा नभएको)







समाधान

यहाँ (क) ΔPQR मा,

आधार (b) = QR = 9 cm

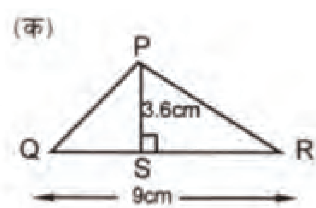
उचाइ (h) = PS = 3.6 cm

क्षेत्रफल (A) = ?

हामीलाई थाहा छ,

त्रिभुजको क्षेत्रफल (A) = $\frac{1}{2} \times b \times h$

$= \frac{1}{2} \times 9 \times 3.6$



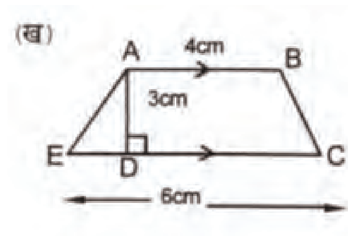
$= 16.2 \text{ cm}^2$

(ख) यहाँ समलम्ब चतुर्भुज ABCE मा,

समानान्तर भुजाहरू $a = AB = 4\text{cm}$, $b = CE = 6 \text{ cm}$

उचाइ $(h) = AD = 3 \text{ cm}$

क्षेत्रफल $(A) = ?$



हामीलाई थाहा छ,

समलम्ब चतुर्भुजको क्षेत्रफल $(A) = \frac{1}{2} \times h \times (a + b)$

$= \frac{1}{2} \times 3 \times (4 + 6)$

$= \frac{1}{2} \times 3 \times 10$

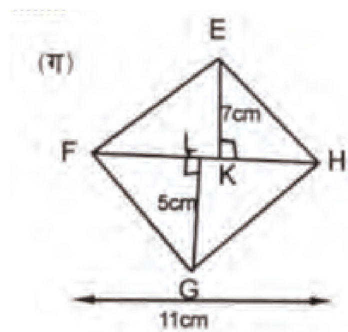
$= 15\text{cm}^2$

(ग) यहाँ चतुर्भुज EFGH मा,

उचाइहरू $h_1 = EK = 7\text{cm}$, $h_2 = GL = 5 \text{ cm}$

विकर्ण $(d) = FH = 11 \text{ cm}$

क्षेत्रफल $(A) = ?$



हामीलाई थाहा छ,

चतुर्भुजको क्षेत्रफल $A = \frac{1}{2} \times d \times (h_1 + h_2)$

$= \frac{1}{2} \times 11 \times (7+5)$

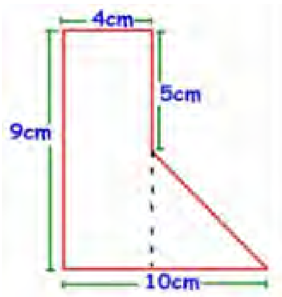
$= \frac{1}{2} \times 11 \times 12$

$= 66 \text{ cm}^2$

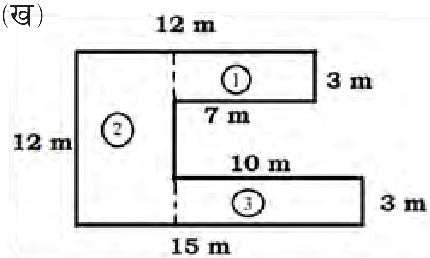
उदाहरण 2

दिइएका ज्यामितीय आकृतिहरूको क्षेत्रफल निकाल्नुहोस् :

(क)

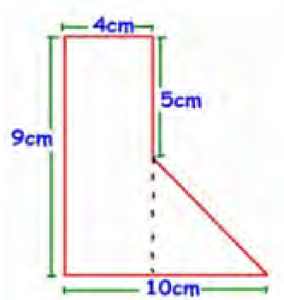


(ख)



समाधान

(क) दिइएका ज्यामितीय आकृति आयत र समकोण त्रिभुज मिलेर बनेको छ ।



तसर्थ दिइएको आकृतिको क्षेत्रफल = आयतको क्षेत्रफल + समकोण त्रिभुजको क्षेत्रफल हुन्छ ।

यहाँ, आयतको लम्बाइ (l) = 9 cm

आयतको चौडाइ (b) = 4 cm

$\therefore$ आयतको क्षेत्रफल $(A_1) = l \times b = 9 \times 4 = 36cm^2$

समकोण त्रिभुजको आधार (b)$=10 - 4 = 6cm$

समकोण त्रिभुजको लम्ब (p) $= 9 - 5 = 4cm$

$\therefore$ समकोण त्रिभुजको क्षेत्रफल $(A_2) = \frac{1}{2} \times p \times b = \frac{1}{2} \times 4 \times 6 = 12cm^2$

अब दिइएको आकृतिको क्षेत्रफल = आयतको क्षेत्रफल + समकोण त्रिभुजको क्षेत्रफल

$= 36 + 12$

$= 48cm^2$

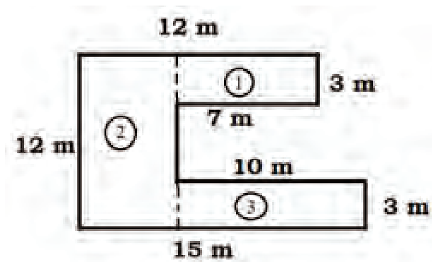
(ख) दिइएको ज्यामितिय आकृति ३ ओटा आयतहरू मिलेर बनेको छ ।

तसर्थ दिइएको आकृतिको क्षेत्रफल = पहिलो आयतको क्षेत्रफल + दोस्रो आयतको क्षेत्रफल + तेस्रो आयतको क्षेत्रफल हुन्छ ।

यहाँ, पहिलो आयतको लम्बाई $(l_1) = 7$ m,

चौडाइ $(b_1) = 3$ m

∴ पहिलो आयतको क्षेत्रफल $(A_1) = l_1 \times b_1 = 7 \times 3 = 21\ m^2$



दोस्रो आयतको लम्बाइ $(l_2) = 12$ m,

चौडाइ $(b_2) = 15 - 10 = 5$ m

∴ दोस्रो आयतको क्षेत्रफल $(A_2) = l_2 \times b_2$

$= 12 \times 5$

$= 60\ m^2$

तेस्रो आयतको लम्बाइ $(l_3) = 10$ m,

चौडाइ $(b_3) = 3$ m

∴ तेस्रो आयतको क्षेत्रफल $(A_3) = l_3 \times b_3 = 10 \times 3 = 30\ m^2$

अब,

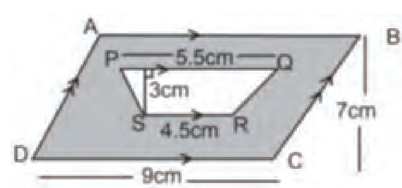
दिइएको आकृतिको क्षेत्रफल = पहिलो आयतको क्षेत्रफल + दोस्रो आयतको क्षेत्रफल + तेस्रो आयतको क्षेत्रफल

$= 21 + 60 + 30$

$= 111 m^2$

उदाहरण 3

सँगै दिइएको चित्रमा छाया पारिएको भागको क्षेत्रफल पत्ता लगाउनुहोस् :



समाधान

यहाँ ABCD एउटा समानान्तर चतुर्भुज हो ।

समानान्तर चतुर्भुजको आधार (b) = 9 cm र उचाइ (h) = 7 cm छ ।

∴ समानान्तर चतुर्भुजको क्षेत्रफल $(A_1) = b \times h = 9 \times 7 = 63\ cm^2$

फेरि, समलम्ब चतुर्भुज PQRS मा,

समानान्तर भुजाहरू a = SR = 4.5 cm, b = PQ = 5.5 cm

उचाइ (h) = 3 cm

∴ समलम्ब चतुर्भुजको क्षेत्रफल $(A_2) = \frac{1}{2} \times h \times (a + b)$

$$= \frac{1}{2} \times 3 \times (4.5 + 5.5)$$

$$= \frac{1}{2} \times 3 \times 10$$

$$= 15cm^2$$

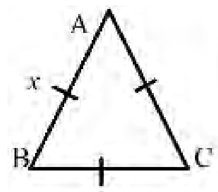
अब, छाया पारिएको भागको क्षेत्रफल (A) = $A_1 - A_2$

$= 63 - 15$

$= 48\ cm^2$

उदाहरण 4

सँगैको त्रिभुजको क्षेत्रफल $16\sqrt{3}\,cm^2$ भए x को मान पत्ता लगाउनुहोस् :



समाधान

यहाँ ABC एउटा समबाहु त्रिभुज हो ।

जसको क्षेत्रफल (A) = $16\sqrt{3}\,cm^2$ छ ।

समबाहु त्रिभुजको भुजा (a) = x = ?

हामीलाई थाहा छ,

समबाहु त्रिभुजको क्षेत्रफल (A) = $\frac{\sqrt{3}}{4} a^2$

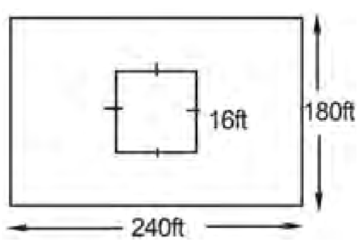
or, $16\sqrt{3} = \frac{\sqrt{3}}{4} x^2$

or, $x^2 = 64$

$\therefore x = 8cm$

उदाहरण 5

एउटा 240 ft लम्बाइ भएको र 180 ft चौडाइ भएको आयतकार खेतका बिचमा एउटा 16 ft लम्बाइ भएको एउटा वर्गाकार पोखरी छ भने पोखरीबाहेकको खेतको क्षेत्रफल कति होला ?



समाधान

आयतकार खेतको लम्बाइ (l) = 240 ft

आयतकार खेतको चौडाइ (b) = 180 ft

∴ आयतकार खेतको क्षेत्रफल (A_1) = $l \times b = 240 \times 180 = 43200\ ft^2$

फेरि वर्गाकार पोखरीको लम्बाइ (l) = 16 ft

∴ वर्गाकार पोखरीको क्षेत्रफल (A_2) = $l^2 = (16)^2 = 256\ ft^2$

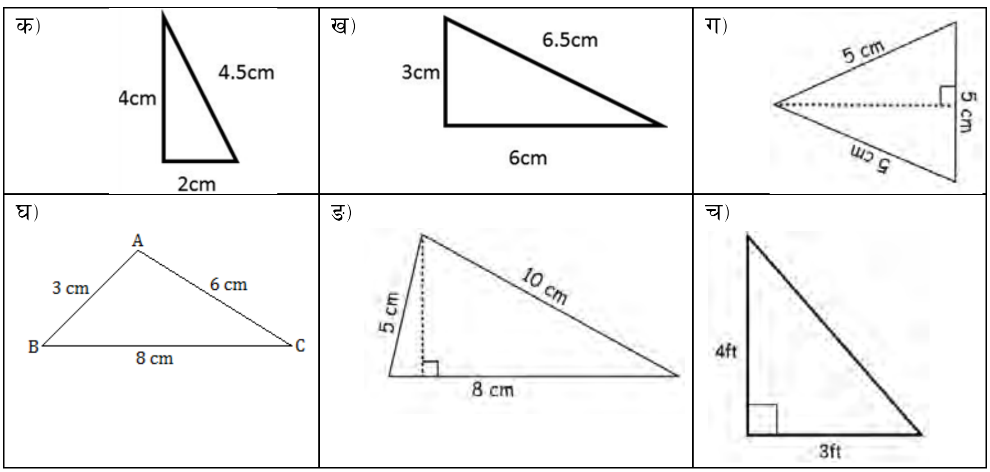
अब पोखरीबाहेकको खेतको क्षेत्रफल (A) = खेतको क्षेत्रफल – पोखरीको क्षेत्रफल

$= 43200 - 256$

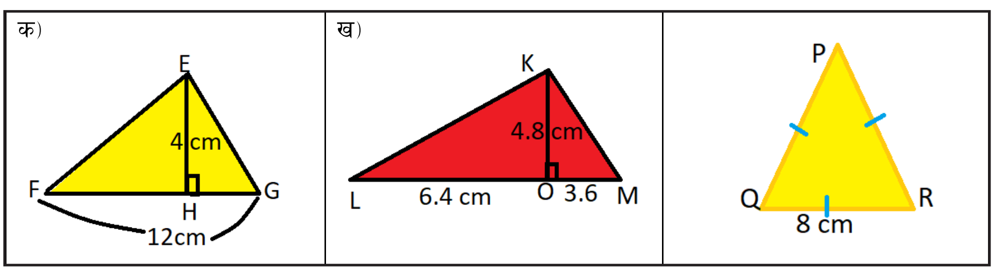
$= 42944\ ft^2$

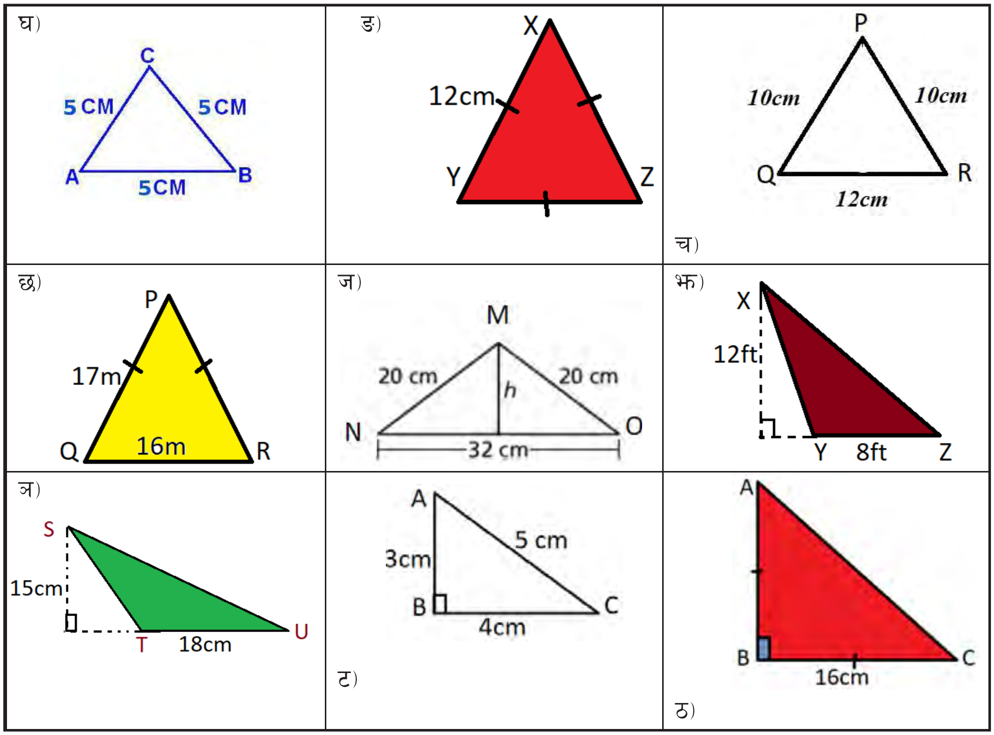
अभ्यास 8.1

1. दिइएका त्रिभुजको परिमिति पत्ता लगाउनुहोस् :



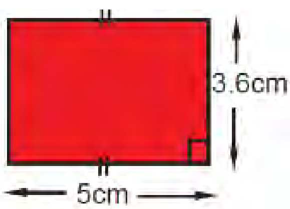
2. दिइएका त्रिभुजको क्षेत्रफल पत्ता लगाउनुहोस् :



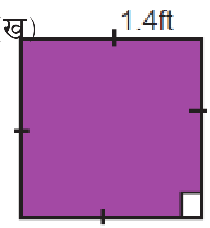


3. दिइएका चतुर्भुजको क्षेत्रफल पत्ता लगाउनुहोस् :

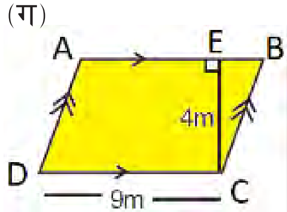
(क)



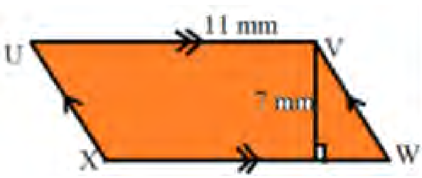
(ख)



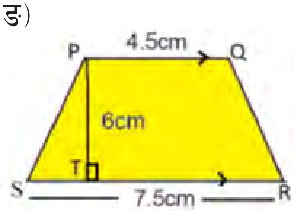
(ग)



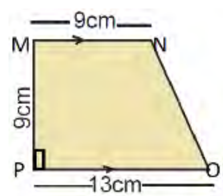
(घ)

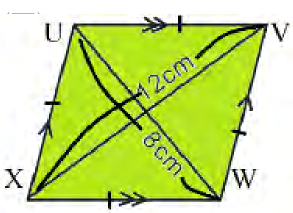


(ङ)

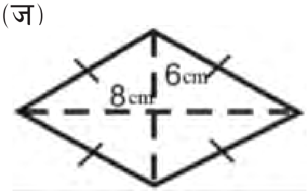


(च)

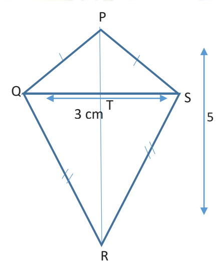




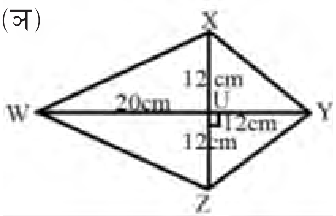
(ज)



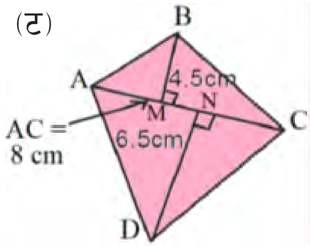
(झ)



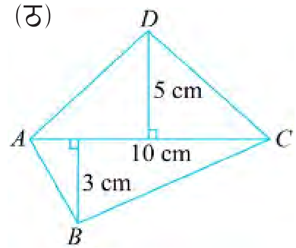
(ञ)



(ट)

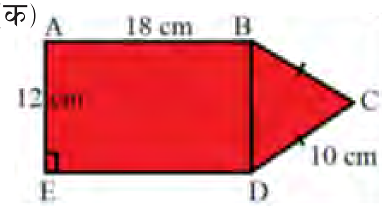


(ठ)

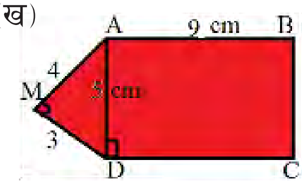


4. दिइएका ज्यामितीय आकृतिको क्षेत्रफल निकाल्नुहोस् :

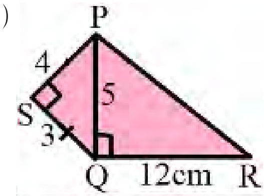
(क)



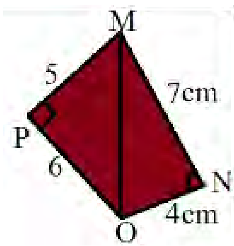
(ख)



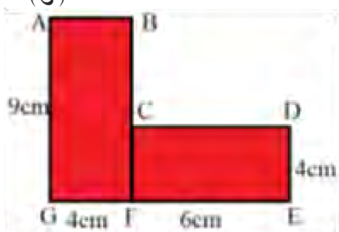
(ग)



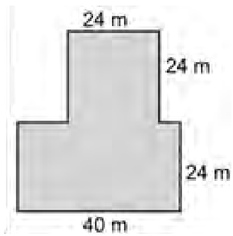
(घ)



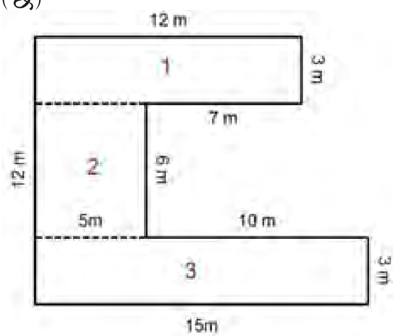
(ङ)



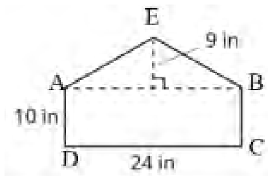
(च)



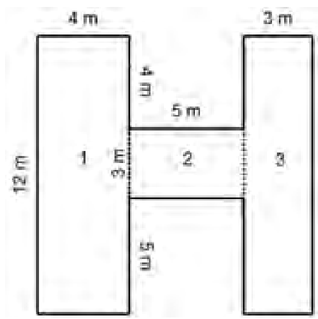
(छ)



(ज)

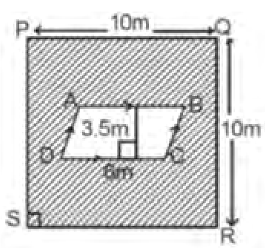


(झ)

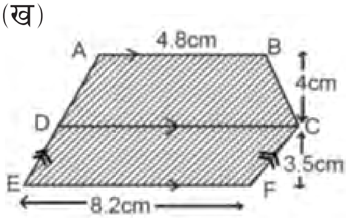


5. दिइएका चित्रमा छायाँ पारिएका भागको क्षेत्रफल निकाल्नुहोस् :

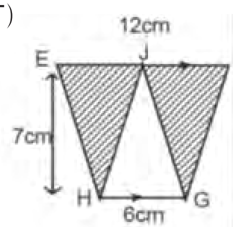
(क)



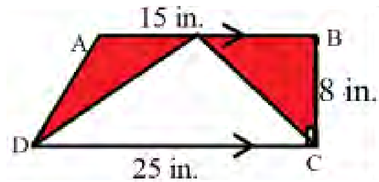
(ख)



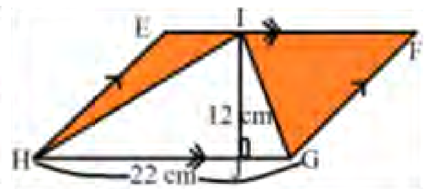
(ग)



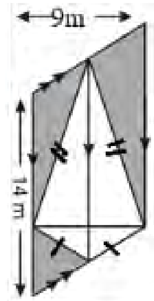
(घ)



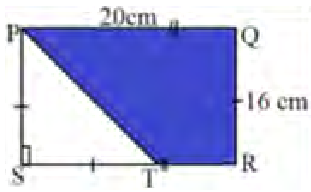
(ङ)



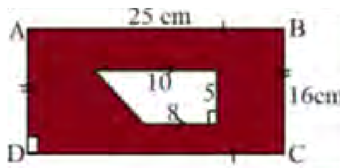
(च)



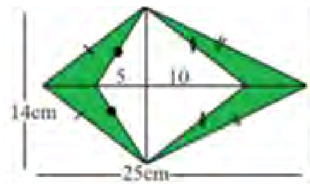
(छ)



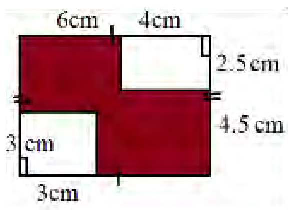
(ज)



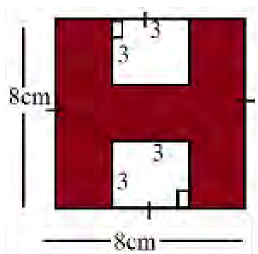
(झ)



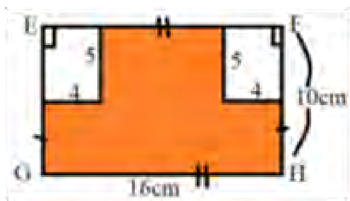
(ञ)



(ट)

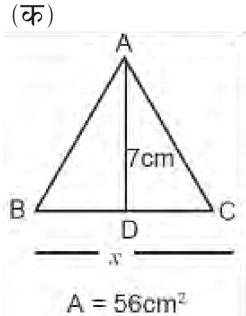


(ठ)

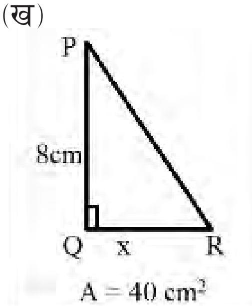


6. **दिइएका चित्रमा x को मान निकाल्नुहोस् :**

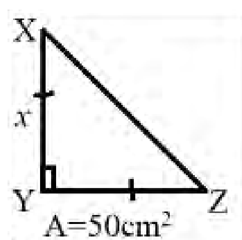
(क)



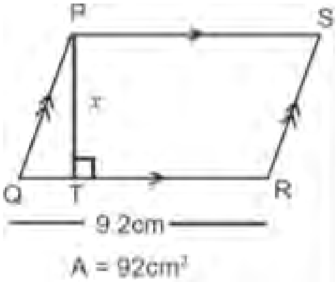
(ख)



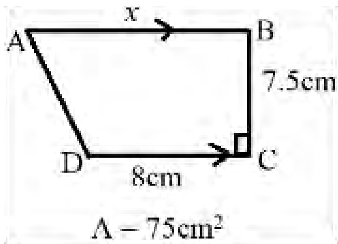
(ग)



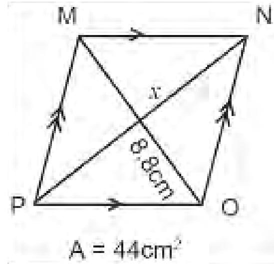
(घ)



(ङ)



(च)



7. (क) एउटा 120 मिटर लम्बाइ र 110 मिटर चौडाइ भएको आयताकार बगैँचाको बिचमा 18 मिटर लामो र 9 मिटर चौडाइ भएको भलिबल कोर्ट बनाइएको छ। भलिबल कोर्टबाहेक बगैँचाको क्षेत्रफल कति होला ?

(ख) एउटा 125 मिटर लम्बाइ र 100 मिटर चौडाइ भएको आयताकार खेतका बिचमा 50 मिटर लम्बाइको वर्गाकार माछा पोखरी बनाइएको छ। माछा पोखरीबाहेक खेतको क्षेत्रफल कति होला, पत्ता लगाउनुहोस्।

8. (क) 9 फिट लामो र 7 फिट चौडा भएको पर्खालमा कतिओटा 1 वर्ग फिटका बोर्डहरू नखप्टाईकन टाँस्न सकिएला ?

(ख) 25 मिटर लम्बाइ र 3 मिटर चौडाइ भएको पर्खालमा कतिओटा 1 वर्ग मिटरका प्लाई नखप्टाईकन टाँस्न सकिएला ?

9. (क) एउटा वर्गाकार खेतको परिमिति 200 फिट छ भने,

(i) उक्त खेतको लम्बाई कति होला ?

(ii) उक्त खेतको क्षेत्रफल निकाल्नुहोस्।

(ख) एउटा वर्गाकार चउरको वरिपरि लगाएको पर्खालको लम्बाइ 80 मिटर छ भने,

(i) उक्त चउरको लम्बाइ कति होला ?

(ii) उक्त चउरको क्षेत्रफल निकाल्नुहोस्।

(ग) एउटा आयतकार कोठाको लम्बाइ 15 ft र परिमिति 54 ft छ भने,

(i) उक्त कोठाको चौडाइ कति होला ?

(ii) उक्त कोठाको क्षेत्रफल निकाल्नुहोस्।

(घ) एउटा आयतकार कोठाको लम्बाइ चौडाइको दोब्बर छ। यदि परिमिति 60 ft छ

भने,

(i) **उक्त कोठाको लम्बाइ र चौडाइ कति कति होला ?**

(ii) **उक्त कोठामा कार्पेट बिछ्याउन कति वर्ग फिट कार्पेट चाहिन्छ ?**

10. **सँगैको चित्रमा एउटा गाउँका विभिन्न महत्त्वपूर्ण ठाउँहरू दिइएको छ। चित्र हेरी निम्नलिखित ठाउँहरूको क्षेत्रफल पत्ता लगाउनुहोस् :**

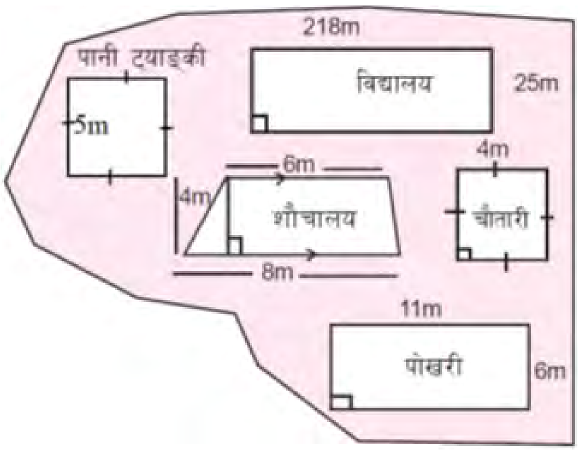
(क) सार्वजनिक शौचालय

(ख) पोखरी

(ग) विद्यालय

(घ) चौतारी

(ङ) पानी ट्याङ्की



परियोजना कार्य

एउटा A4 साइजको पेपर लिनुहोस्। त्यसका बिचमा 5 cm लम्बाइ भएको एउटा समबाहु चतुर्भुजको रचना गर्नुहोस्। त्यो समबाहु चतुर्भुजलाई कैँचीको सहयोगले त्यहाँबाट काटेर निकाल्नुहोस्। अब बाँकी भागको क्षेत्रफल पत्ता लगाई कक्षाकोठामा प्रस्तुत गर्नुहोस्।

उत्तर

1. (क) 10.5 cm (ख) 15.5 cm (ग) 15 cm (घ) 17cm (ङ) 23cm (च) 12 ft
2. (क) 24 cm^2 (ख) $24cm^2$ (ग) $16\sqrt{3}$ cm^2 (घ) $\frac{25\sqrt{3}}{4}$ cm^2 (ङ) $36\sqrt{3}$ cm^2 (च) $48cm^2$ (छ) 120 m^2 (ज) 192 cm^2 (झ) 48sq.ft (ञ) 135 cm^2 (ट) 6 cm^2 (ठ) 128 cm^2
3. (क) 18 cm^2 (ख) 1.96 sq.ft (ग) 36 m^2 (घ) 77 mm^2 (ङ) 36 cm^2

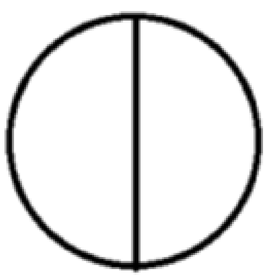
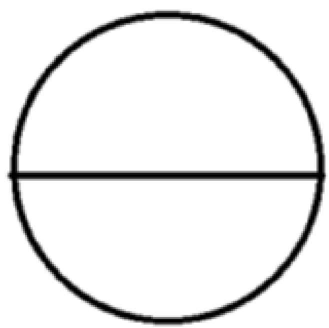
(च) $99cm^2$ (छ) $48\ cm^2$ (ज) $24\ cm^2$ (झ) $7.5\ cm^2$ (ञ) $384\ cm^2$
(ट) $44\ cm^2$ (ठ) $40\ cm^2$

4. (क) $264\ cm^2$ (ख) $51\ cm^2$ (ग) $36\ cm^2$ (घ) $29\ cm^2$ (ङ) $60\ cm^2$
(च) $1536\ m^2$ (छ) $111\ m^2$ (ज) 348 sq.inch (झ) $99\ m^2$
5. (क) $79\ m^2$ (ख) $54.7cm^2$ (ग) $42cm^2$ (घ) 60 sq.inch (ङ) $132\ cm^2$
(च) $63\ m^2$ (छ) $192\ m^2$ (ज) $355\ cm^2$ (झ) $70\ cm^2$ (ञ) $51\ cm^2$
(ट) $46\ cm^2$ (ठ) $120\ cm^2$
6. (क) 16 cm (ख) 10 cm (ग) 10cm (घ) 10cm (ङ) 12cm (च) 10cm
7. (क) $13038\ m^2$ (ख) $10000\ m^2$ 8.(क) 63 ख) 75
9. (क) (i) 50 ft (ii) 2500 sq.ft (ख) (i)20 m (ii) $400\ m^2$
(ग) (i) 12 ft (ii)180 sq.ft (घ) (i) 20 ft, 10 ft (ii) 200 sq.ft
10. (क) $28\ m^2$ (ख) $66\ m^2$ (ग) $5450\ m^2$ (घ) $16\ m^2$ (ङ) $25\ m^2$

8.2 वृत्तको क्षेत्रफल (Area of Circle)

क्रियाकलाप 10

फरक फरक नापका वृत्तहरू बनाउनुहोस् र निम्नलिखित क्रियाकलापहरू गर्नुहोस् :

(क) अर्धव्यास र व्यासको लम्बाइ नाप्नुहोस् ।

(ख) ती वृत्तहरूलाई कैँचीले काटेर निकाल्नुहोस् र प्रत्येकलाई रुलरमा एक फन्को घुमाउनुहोस् । अब परिधि कति कति रहेछन्, लेख्नुहोस् ।

(ग) परिधि र व्यासको अनुपात निकाल्नुहोस् र त्यसलाई केले जनाइन्छ ? साथीसँग छलफल गर्नुहोस् ।

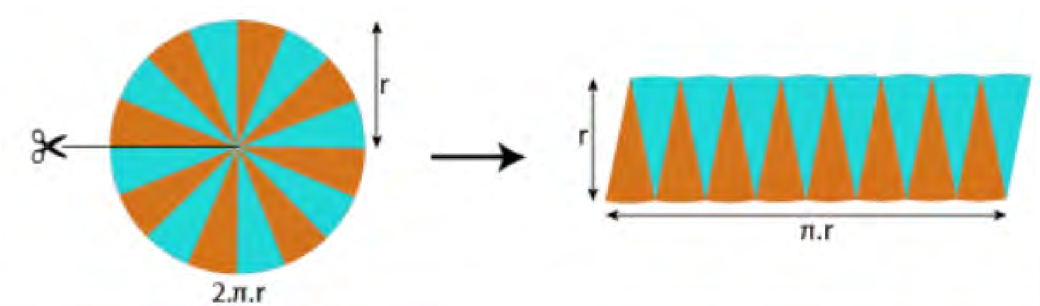
कुनै पनि वृत्तको वरिपरिको घेराको लम्बाइलाई परिधि (circumference) भनिन्छ । वृत्तको परिधि र त्यसको व्यासको अनुपातलाई π (Pie) ले जनाइन्छ । तसर्थ $\pi = \frac{C}{d}$, $d = 2r$ वा $C = \pi d = 2\pi r$ हुन्छ । सामान्यतया π को अनुमानित मान (approximate value) $\frac{22}{7}$ वा 3.14 हुन्छ । त्यसैले समस्या समाधान गर्दा π को मान $\frac{22}{7}$ वा 3.14 राखिन्छ ।

क्रियाकलाप 11

निम्नअनुसारका क्रियाकलाप गर्नुहोस् ।

1. एउटा कार्डबोर्ड लिनुहोस् र एउटा वृत्त बनाउनुहोस् । यसको अर्धव्यासलाई r ले जनाउनुहोस् ।
2. उक्त वृत्तलाई चित्र न. (क) मा देखाए जस्तै पट्याएर सकेसम्म क्षेत्रकहरू सानो हुने गरी बराबर भागमा बाँड्नुहोस् । (ठुलो वृत्त भएमा 32, 64, ... भागमा पनि विभाजन गर्न सकिन्छ ।)
3. अब प्रत्येक भागलाई चित्रमा जस्तै रङ लगाउनुहोस् र प्रत्येक भागलाई कैँचीले काटेर छुट्याउनुहोस् ।
4. ती त्रिभुजाकार भागलाई चित्र न. (ख) मा जस्तै मिलाएर समानान्तर चतुर्भुज आकार बनाउनुहोस् ।

   (छेउका एउटालाई 2 बराबर टुक्रा बनाएर आयत पनि बनाउन सकिन्छ ।)



चित्र नं. (क) चित्र नं. (ख)

5. त्यसरी बनेको समानान्तर चतुर्भुजको क्षेत्रफलसँग उक्त वृत्तको क्षेत्रफल बराबर हुन्छ ।

   अब वृत्तको अर्धव्यास r भएकाले परिधि $2\pi r$ हुन्छ ।

तसर्थ समानान्तर चतुर्भुजको उचाइ (h) = r हुन्छ ।

समानान्तर चतुर्भुजको आधार (b) = $\frac{2\pi r}{2} = \pi r$

∴ समानान्तर चतुर्भुजको क्षेत्रफल (A) = b × h = $\pi r \times r = \pi r^2$

अतः वृत्तको क्षेत्रफल = πr^2

व्यासको आधा अर्धव्यास हुने भएकाले $r = \frac{d}{2}$ राख्दा,

वृत्तको क्षेत्रफल (A)= $\pi(\frac{d}{2})^2 = \frac{1}{4}\pi d^2$ हुन्छ ।

उदाहरण 1

दिइएका नापका वृत्तको क्षेत्रफल पत्ता लगाउनुहोस् : ($\pi = 3.14$)

(क) अर्धव्यास = 7cm (ख) व्यास = 34 ft (ग) परिधि = 62.8 inch

समाधान

(क) यहाँ,

वृत्तको अर्धव्यास (r) = 7cm

वृत्तको क्षेत्रफल (A) = ?

हामीलाई थाहा छ,

वृत्तको क्षेत्रफल (A) = $\pi r^2 = 3.14 \times 7 \times 7 = 153.86$ cm^2

अर्को तरिका,

वृत्तको व्यास (d) = 34 ft

वृत्तको क्षेत्रफल (A) = ?

हामीलाई थाहा छ,

वृत्तको क्षेत्रफल (A) = $\frac{1}{4}\pi d^2 = \frac{3.14 \times 34 \times 34}{4} = 907.46$ sq.ft

(ग) यहाँ वृत्तको परिधि (C) = 62.8 inch

वृत्तको क्षेत्रफल (A) = ?

हामीलाई थाहा छ ।

वृत्तको परिधि (C) = $2\pi r$

$$or, 62.8 = 2 \times 3.14 \times r$$

$$\therefore r = \frac{62.8}{6.28} = 10 \text{ inch}$$

फेरि,

वृत्तको क्षेत्रफल (A) = $\pi r^2 = 3.14 \times 10 \times 10 = 314$ sq. inch

$\therefore$ वृत्तको क्षेत्रफल (A) = 314 sq. inch

उदाहरण 2

5544 cm^2 क्षेत्रफल भएको वृत्तको अर्धव्यास कति होला ? ($\pi = \frac{22}{7}$)

समाधान

यहाँ वृत्तको क्षेत्रफल (A) = 5544 cm^2

वृत्तको अर्धव्यास (r) = ?

अब हामीलाई थाहा छ,

वृत्तको क्षेत्रफल (A) = πr^2

$$or, 5544 = \frac{22}{7} \times r^2$$

$$or, r^2 = \frac{5544 \times 7}{22} = 1764$$

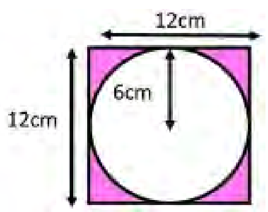
$$\therefore r = 42 \text{ cm}$$

अतः वृत्तको अर्धव्यास (r) = 42 cm

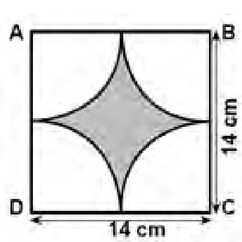
उदाहरण 3

दिइएको चित्रमा छाया पारिएको भागको क्षेत्रफल निकाल्नुहोस् :

(क)



(ख)



समाधान

(क) यहाँ चित्रमा दिइएको पूरा भाग एउटा वर्ग हो । छाया नपारेको भाग वृत्त रहेको छ ।

वर्गको भुजा (a) = 12cm

∴ वर्गको क्षेत्रफल $(A_1) = a^2 = 12 \times 12 = 144cm^2$

र वृत्तको अर्धव्यास (r) = 6 cm

∴ वृत्तको क्षेत्रफल $(A_2) = \pi r^2 = 3.14 \times 6 \times 6 = 113.04\ cm^2$

अब, छाया पारिएको भागको क्षेत्रफल $(A) = A_1 - A_2$

$= 144 - 113.04$

$= 30.96\ cm^2$

(ख) यहाँ चित्रमा दिइएको पूरा भाग ABCD एउटा वर्ग हो । छाया नपारेको भाग वृत्त रहेको छ ।

वर्गको भुजा (a) = 14cm

∴ वर्गको क्षेत्रफल $(A_1) = a^2 = 14 \times 14 = 196\ cm^2$

फेरि, यहाँ चित्रमा छाया नपारिएका भागहरू 4 ओटा एक चौथाइका वृत्तहरू हुन् ।

वृत्तको अर्धव्यास (r) = $\frac{14}{2}$ cm = 7cm

∴ एक चौथाइ वृत्तको क्षेत्रफल = $\frac{1}{4}\pi r^2 = \frac{1}{4} \times \frac{22}{7} \times 7 \times 7 = \frac{154}{4}\ cm^2$

तसर्थ 4 ओटा एक चौथाइ वृत्तको क्षेत्रफल $(A_2) = 4 \times \frac{154}{4} = 154\ cm^2$

अब छाया पारिएको भागको क्षेत्रफल $(A) = A_1 - A_2$

$= 196 - 154$

$= 42\ cm^2$

उदाहरण 4

यदि एउटा वृत्ताकार पौडी पोखरीको परिधि 125.6m छ भने उक्त पोखरीको पिँधको अर्धव्यास र क्षेत्रफल निकाल्नुहोस् : $(\pi = 3.14)$

समाधान

यहाँ वृत्ताकार पोखरीको पिँध वृत्त हुने भएकोले,

परिधि (C) = 125.6 m

अर्धव्यास (r) = ?

क्षेत्रफल (A_1) = ?

अब परिधि $(C) = 2\pi r$

or, $125.6\ m = 2 \times 3.14 \times r$

or, $\frac{125.6}{6.28}$ m = r

∴ वृत्तको अर्धव्यास (r) = 20m

फेरि, वृत्तको क्षेत्रफल (A) = πr^2

= 3.14 × 20 × 20

= 1256 m^2

अतः वृत्ताकार पोखरीको पिँधको अर्धव्यास र क्षेत्रफल 20m र 1256 m^2 हुन्छ।

उदाहरण 5

एउटा बेलनाकार इनारको ढकनीको क्षेत्रफल 15400 cm^2 छ। ($\pi = \frac{22}{7}$)

(क) उक्त ढकनीको अर्धव्यास कति होला ?

(ख) ढकनीको वरिपरि स्टिलको घेराबार लगाउन कति मिटर आवश्यक पर्छ ?

(ग) यदि स्टीलको प्रति मिटर रु.250 पर्छ भने जम्मा कति खर्च लाग्ला ?

समाधान

यहाँ बेलनाकार इनारको ढकनी वृत्त हुने भएकाले,

क्षेत्रफल (A) = 15400 cm^2

(क) अर्धव्यास (r) = ?

हामीलाई थाहा छ,

क्षेत्रफल (A) = πr^2

or, $15400 = \frac{22}{7} \times r^2$

or, $\frac{15400 \times 7}{22} = r^2$

or, $4900 = r^2$

∴ r = 70 cm

∴ वृत्तको अर्धव्यास (r) = 70cm

(ख) ढकनीको वरिपरिको घेरा भनेको वृत्तको परिधि हो।

अब परिधि (C) = $2\pi r = 2 \times \frac{22}{7} \times 70$ = 440 cm = 4.4 m

∴ ढकनीको वरिपरि स्टिलको घेराबार लगाउन 4.4 m स्टल आवश्यक पर्छ।

(ग) यहाँ,

1 m स्टिलको मूल्य = रु.250

4.4 m स्टिलको मूल्य = 4.4 × 250

= रु.1100

अत: ढकनीको वरिपरि स्टिलको घेराबार गर्न रु.1100 लाग्छ ।

अभ्यास 8.2

1. **तलको नाप भएका वृत्तको क्षेत्रफल पत्ता लगाउनुहोस् :** [$\pi = 3.14$]

(क) अर्धव्यास =3cm (ख) अर्धव्यास =8 ft (ग) अर्धव्यास =16m

(घ) व्यास =5cm (ङ) व्यास =12 inch (च) व्यास =18 m

(छ) व्यास =20km (ज) व्यास =15mm (झ) व्यास =22cm

2. **निम्नलिखित परिधि भएको वृत्तको क्षेत्रफल पत्ता लगाउनुहोस् :** [π=3.14]

(क) 34.54 cm (ख) 65.94 m (ग) 18.84 inch

(घ) 113.04 m (ङ) 376.80 ft (च) 157 m

3. **निम्नलिखित क्षेत्रफल भएको वृत्तको अर्धव्यास पत्ता लगाउनुहोस् :** [$\pi=\frac{22}{7}$]

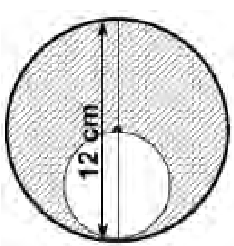
(क) 154 cm^2 (ख) 346.5 ft^2 (ग) 616 m^2

(घ) 1386 m^2 (ङ) 38.5 km^2 (च) 3850 ft^2

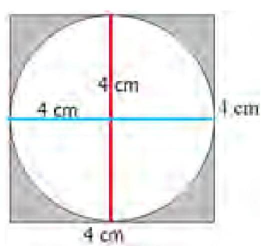
4. **तलका चित्रहरूको छाया पारिएको भागको क्षेत्रफल निकाल्नुहोस् :** [π=3.14]

क) (ख) (ग)

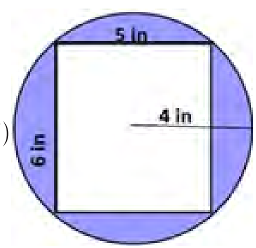
(घ)



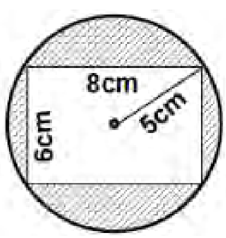
(ङ)



(च)

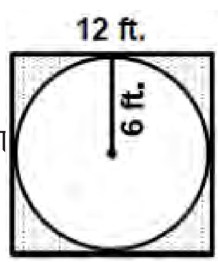


5.

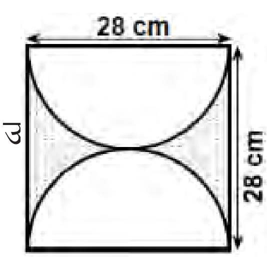


ाकार कोठा

$\pi = \frac{22}{7}$)



र छ भने उ



(ख) एउटा वृत्ताकार मनोरञ्जन पार्कको अर्धव्यास 21 मिटर भए उक्त पार्कले कति क्षेत्रफल ओगटेको रहेछ ? ($\pi = \frac{22}{7}$)

(ग) एउटा गाईलाई 7 ft लामो डोरीले किला ठोकेर घाँसे चउरमा बाँधिएको छ । उक्त गाईले बढीमा कति क्षेत्रफलको घाँस खान सक्छ ? ($\pi = \frac{22}{7}$)

6. (क) एउटा बेलनाकार कचउराको आधारको व्यास 9 cm भए उक्त कचउराको आधारको क्षेत्रफल कति हुन्छ, पत्ता लगाउनुहोस् । ($\pi = 3.14$)

(ख) एउटा बेलनाकार पाइपको आधारको व्यास 30 cm भए उक्त पाइपको आधारको क्षेत्रफल कति हुन्छ, पत्ता लगाउनुहोस् । ($\pi = 3.14$)

7. (क) एउटा बेलनाकार ट्याङ्कीको पिँधको क्षेत्रफल 154 वर्ग फिट छ भने उक्त ट्याङ्कीको अर्धव्यास र परिधि निकाल्नुहोस् । ($\pi = \frac{22}{7}$)

(ख) एउटा 153.86 m^2 क्षेत्रफल भएको वृत्ताकार खेल मैदानलाई ढलान गरियो भने उक्त मैदानको ढलान गरेको भागको व्यास कति होला ? साथै उक्त मैदानको ढलानको वरिपरिको घेरा कति मिटर होला ? ($\pi = 3.14$)

8. (क) शर्मिलाले 5cm अर्धव्यास भएको एउटा वृत्त खिचिन् । त्यसैगरी प्रकाशले पनि 7cm अर्धव्यास भएको अर्को वृत्त खिच्यो । अब कसले खिचेको वृत्तको क्षेत्रफल धेरै छ र कतिले धेरै छ ? ($\pi = 3.14$)

(ख) सलमानले 14 m अर्धव्यास भएको एउटा इनार खन्यो । त्यसैगरी प्रमिलाले पनि 18 m अर्धव्यास भएको अर्को इनार खनिन् । अब कसको इनारले जग्गा बढी ओगट्छ र कतिले धेरै ओगट्छ ? ($\pi = 3.14$)

9. एउटा वृत्ताकार पोखरीको क्षेत्रफल 616 m^2 छ । ($\pi = \frac{22}{7}$)

(क) उक्त पोखरीको अर्धव्यास कति होला ?

(ख) पोखरीको वरिपरि घेराबार लगाउन कति मिटर तारजाली आवश्यक पर्छ ?

(ग) यदि प्रति मिटर रु.250 पर्छ भने पोखरीमा एकपटक तारजाली लगाउन जम्मा कति खर्च लाग्ला ?

10. एकजना धावकले वृत्ताकार धावनमार्गमा 4 फन्को मादा{ 3520 मिटर दौड पूरा गऱ्यो भने

(क) त्यस धावनमार्गको वरिपरिको लम्बाइ कति होला ? ($\pi = \frac{22}{7}$)

(ख) त्यसका व्यास कति होला ?

(ग) त्यस धावनमार्गले कति क्षेत्रफल ओगटेको छ ?

(घ) त्यस धावन मार्गको वरिपरि तारजाली राख्न प्रति मिटर रु.600 का दरले जम्मा कति खर्च लाग्ला ?

परियोजना कार्य

(क) तपाईंको वरिपरि पाइने कुनै 3 ओटा वृत्ताकार वस्तुको नाम लेख्नुहोस् । अब ती वस्तुहरूको व्यास नाप्नुहोस् र त्यसका परिधि र क्षेत्रफल निकाली कक्षामा प्रस्तुत गर्नुहोस् ।

(ख) 18 cm लामो धागोका तीन टुक्रा लिनुहोस् । अब उक्त धागोबाट क्रमशः एउटा वर्ग, एउटा आयत र एउटा वृत्त बनाउनुहोस् । अब तिनीहरूको क्षेत्रफल पत्ता लगाई सबैभन्दा कम र सबैभन्दा बढी क्षेत्रफल कुन आकृतिको भयो, छलफल गर्नुहोस् ।

उत्तर

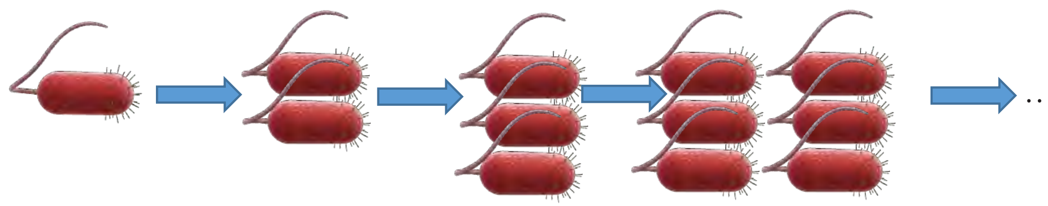
1. (क) 28.26 cm^2 (ख) 200.96 sq.ft (ग) 803.84m^2 (घ) 19.625 cm^2
   (ङ) 113.04 sq.inch (च) 254.34 m^2 (छ) 314 km^2
   (ज) 176.625 mm^2 (झ) 379.94 cm^2
2. (क) 94.985 cm^2 (ख) 346.185 m^2 (ग) 28.26 sq.inch
   (घ) 1017.36 m^2 (ङ) 11304 sq.ft (च) 1886.5 m^2
3. (क) 7 cm (ख) 10.5 ft (ग) 14 m (घ) 21 m
   (ङ) 3.5 km (च) 35 ft
4. (क) 84.78 cm^2 (ख) 3.44 cm^2 (ग) 20.24 sq.in (घ) 30.5 cm^2
   (ङ) 30.96 sq.ft (च) 168.56 cm^2
5. (क) 154 m^2 (ख) 1386 m^2 (ग) 154 sq.ft
6. (क) 63.585 cm^2 (ख) 706.5 cm^2
7. (क) 7 ft; 44ft (ख) 14m; 43.96 m
8. (क) प्रकाशले; 75.36 cm^2 (ख) प्रमिलाले; 401.92 m^2
9. (क) 14 m (ख) 88 m (ग) रु=22,000
10. (क) 880m (ख) 280 m (ग) 61600 m^2 (घ) रु.5,28,000

पाठ 9

घाताङ्क
(Indices)

9.0 पुनरवलोकन (Review)

यदि कुनै ब्याक्टेरिया उसको लागि अनुकूल समयमा प्रत्येक बिस बिस मिनेटमा दोब्बर हुदै जान्छ भने एउटाबाट वृद्धि हुदै जाँदा एक सय बिस मिनेटमा ब्याक्टेरियाको सङ्ख्या कति पुग्छ होला, छलफल गर्नुहोस् :



(क) सुरुमा ब्याक्टेरियाको सङ्ख्या $= 1$

(ख) पहिलो बिस मिनेटमा ब्याक्टेरियाको सङ्ख्या $= 2 = 2^1$

(ग) दोस्रो बिस मिनेटमा ब्याक्टेरियाको सङ्ख्या $= 2 \times 2 = 2^2 = 4$

(घ) तेस्रो बिस मिनेटमा ब्याक्टेरियाको सङ्ख्या $= 2\times 2\times 2 = 2^3 = 8$

(ङ) चौथो बिस मिनेटमा ब्याक्टेरियाको सङ्ख्या $= 2 \times 2 \times 2\times 2 = 2^4 = 16$

(च) पाचौँ बिस मिनेटमा ब्याक्टेरियाको सङ्ख्या $= 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 2^5 = 32$

(छ) छैटौँ बिस मिनेटमा ब्याक्टेरियाको सङ्ख्या $= 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 2^6 = 64$

कुनै सङ्ख्यालाई त्यही सङ्ख्याले धेरै पटक गुणन गर्ने क्रियालाई जनाउन घाताङ्कको प्रयोग गरिन्छ ।

a^n मा a आधार र n लाई घाताङ्क भनिन्छ ।

आधार → 2^6 ← घाताङ्क

9.1 घाताङ्कका नियमहरू (Laws of Indicess)

क्रियाकलाप 1

तलका ढाँचा अध्ययन गरी जोडी जोडीमा छलफल गरी निष्कर्ष निकाल्नुहोस् :

(क) $x^m \times x^n = x^{m+n}$

यहाँ $x^2 \times x^3 = (x \times x) \times (x \times x \times x) = x \times x \times x \times x \times x = x^5 = x^{2+3}$

$x^2 \times x^4 = (x \times x) \times (x \times x \times x \times x) = x \times x \times x \times x \times x \times x = x^6 = x^{2+4}$

$x^3 \times x^1 = (x \times x \times x) \times (x) = x \times x \times x \times x = x^4 = x^{3+1}$

$\therefore x^m \times x^n = x^{m+n}$

एउटै आधार भएका घातहरूको गुणन गर्दा आधार उही रहन्छ भने घाताङ्कहरू जोडिने रहेछ । $x^m \times x^n = x^{m+n}$

(ख) $\boldsymbol{x^m \div x^n = x^{m-n}}$

यहाँ,

$$x^2 \div x^1 = \frac{x^2}{x^1} = \frac{x \times x}{x} = x = x^1 = x^{2-1}$$

$$x^3 \div x^1 = \frac{x^3}{x^1} = \frac{x \times x \times x}{x} = x \times x = x^2 = x^{3-1}$$

$$x^5 \div x^2 = \frac{x^5}{x^2} = \frac{x \times x \times x \times x \times x}{x \times x} = x \times x \times x = x^3 = x^{5-2}$$

$\therefore x^m \div x^n = x^{m-n}$

एउटै आधार भएका घातहरूको भाग गर्दा आधार उही रहन्छ र अंशको घाताङ्कबाट हरको घाताङ्क घटाइने रहेछ । $x^m \div x^n = x^{m-n}$

(ग) $\boldsymbol{x^0 = 1, (x \neq 0)}$

हामीलाई थाहा छ, $x^m \div x^n = x^{m-n}, (x \neq 0)$

$x^m \div x^m = x^{m-m}$

or, $1 = x^0$

$\therefore x^0 = 1$

शून्यबाहेक कुनै पनि सङ्ख्याको घाताङ्क शून्य छ भने त्यसको मान 1 हुन्छ ।
$x^0 = 1, (x \neq 0)$

(घ) $\boldsymbol{(x\,y)^m = x^m y^m}$

यहाँ, $(x\,y)^m = xy \times xy \times xy \times xy \times xy \ldots$ m ओटा xy हरू

$= (x \times x \times x \times x \times x \ldots$ m ओटा x हरू$) \times (y \times y \times y \times y \times y \ldots$ m ओटा y हरू$)$

$= x^m y^m$

त्यसै गरी $\left(\frac{x}{y}\right)^{m} = \frac{x}{y} \times \frac{x}{y} \times \frac{x}{y} \times \frac{x}{y} \times \frac{x}{y} \ldots$ m ओटा $\frac{x}{y}$

$$= \frac{x^{m}}{y^{m}}$$

$$\therefore \left(\frac{x}{y}\right)^{m} = \frac{x^{m}}{y^{m}}$$

यदि गुणन वा भागका रूपमा रहेका आधारहरूको घाताङ्क एउटै छ भने त्यो घाताङ्क सबै आधारमा छुट्याएर लेखिने रहेछ ।

$(x\,y)^{m} = x^{m} y^{m}$ र $\left(\frac{x}{y}\right)^{m} = \frac{x^{m}}{y^{m}}$ हुन्छ ।

(ङ) $x^{-m} = \frac{1}{x^{m}}$

यहाँ, $x^{m} \times x^{-m} = x^{m-m} = x^{0} = 1$

दुवैतर्फ x^{m} ले भाग गर्दा,

or, $\frac{x^{m} \times x^{-m}}{x^{m}} = \frac{1}{x^{m}}$

or, $x^{m-m-m} = \frac{1}{x^{m}}$

$\therefore x^{-m} = \frac{1}{x^{m}}$

यदि अंशमा आधारको घाताङ्क ऋणात्मक छ भने हरमा उही आधारमा घाताङ्क धनात्मकमा लेखिने रहेछ । $x^{-m} = \frac{1}{x^{m}}$

यसैगरी हरमा आधारको घाताङ्क ऋणात्मक छ भने, अंशमा उही आधारमा घाताङ्क धनात्मकमा लेख्नुपर्छ । $\frac{1}{x^{-m}} = x^{m}$

(च) $(x^{m})^{n} = x^{mn}$

यहाँ,

$(x^{2})^{3} = x^{2} \times x^{2} \times x^{2} = (x \times x) \times (x \times x) \times (x \times x) = x^{6} = x^{2 \times 3}$

$(x^{3})^{4} = x^{3} \times x^{3} \times x^{3} \times x^{3} = (x \times x \times x) \times (x \times x \times x) \times (x \times x \times x) \times (x \times x \times x)$

$= x^{12} = x^{3\times4}$

$(x^4)^5 = x^4 \times x^4 \times x^4 \times x^4 \times x^4$

$= (x \times x \times x \times x) \times (x \times x \times x \times x) \times (x \times x \times x \times x) \times (x \times x \times x \times x)$

$= x^{20} = x^{4\times5}$

$\therefore (x^m)^n = x^{mn}$

अर्को तरिका,

$(x^m \times x^m \times x^m \times$.........................n ओटा) $= x^{mn}$

> यदि घाताङ्कको पनि घाताङ्क छ भने ती घाताङ्कहरूलाई गुणन गरिन्छ ।
>
> $(x^m)^n = x^{mn}$

उदाहरण 1

घाताङ्कका नियमहरू प्रयोग गरेर सरल गर्नुहोस् :

(क) $2^3 \times 2^3$ (ख) $x^3 \times x^2$ (ग) $p^4 \times p^3 \times p^{-5}$

समाधान

(क) यहाँ $2^3 \times 2^3$

$= 2^{3+3}$

$= 2^6$

$= 64$

(ख) $x^3 \times x^2$

$= x^{3+2}$

$= x^5$

(ग) $p^4 \times p^3 \times p^{-5}$

$= p^{4+3-5}$

$= p^2$

उदाहरण 2

घाताङ्कका नियमहरू प्रयोग गरेर सरल गर्नुहोस् :

(क) $x^5 \div x^2$ (ख) $8x^5 \div 2x^2$ (ग) $x^{3n-2} \div x^{2n-5}$

समाधान

(क) यहाँ, $x^5 \div x^2$

$= x^{5-2}$

$= x^3$

(ख) $8x^5 \div 2x^2$

$= 4x^{5-2}$

$= 4x^5$

(ग) $x^{3n-2} \div x^{2n-5}$

$= \frac{x^{3n-2}}{x^{2n-5}}$

$= x^{(3n-2)-(2n-5)}$

$= x^{3n-2-2n+5} = x^{n+3}$

उदाहरण 3

घाताङ्कका नियमहरू प्रयोग गरेर सरल गर्नुहोस् :

(क) $\frac{x^{4n-2}}{x^{2(2n-1)}}$ (ख) $\frac{a^{n-2}}{a^{n+2}}$

समाधान

(क) $\frac{x^{4n-2}}{x^{2(2n-1)}}$

$= x^{(4n-2)-(4n-2)}$

$= x^{4n-2-4n+2}$

$= x^0$

$= 1$

(ख) $\frac{a^{n-2}}{a^{n+2}}$

$= a^{(n-2)-(n+2)}$

$= a^{n-2-n-2}$

$= a^{-4}$

$= \frac{1}{a^4}$

उदाहरण 4

सरल गर्नुहोस् :

(क) $\left(\frac{x^2y^2}{x^3y}\right)^3$ (ख) $(x^3 y^{-2})^3 (-2x^{-2} y^3)^4$

समाधान

यहाँ (क) $\left(\frac{x^2y^2}{x^3y}\right)^3$

$= \frac{(x^2y^2)^3}{(x^3y)^3}$

$= \frac{x^6y^6}{x^9y^3} = \frac{y^{6-3}}{x^{9-6}} = \frac{y^3}{x^3}$

(ख) $(x^3 y^{-2})^3 (-2x^{-2} y^3)^4$

$= (x^9 y^{-6}) \times (16x^{-8} y^{12})$

$= 16x^{9-8} y^{-6+12}$

$= 16xy^6$

उदाहरण 5

सरल गर्नुहोस् :

(क) $(x)^{(a-b)} \times (x)^{(b-c)} \times (x)^{(c-a)}$ (ख) $a^y \times a^x \times a^{(y-x)}$

समाधान

(क) $(x)^{(a-b)} \times (x)^{(b-c)} \times (x)^{(c-a)}$

$= x^{a-b+b-c+c-a}$

$= x^0$

$= 1$

(ख) $a^y \times a^x \times a^{(y-x)}$

$= a^{y+x+y-x}$

$= a^{2y}$

उदाहरण 6

यदि $a = 1, b = 2$ र $c = 3$ भए $a^b \times b^c \times c^a$ को मान पत्ता लगाउनुहोस् :

समाधान

यहाँ, $a^b \times b^c \times c^a$

$= 1^2 \times 2^3 \times 3^1 \quad = 1 \times 8 \times 3 \quad = 24$

अभ्यास 9

1. **घाताङ्कका नियम प्रयोग गरी सरल गर्नुहोस् :**

(क) $3^4 \times 3^3$ (ख) $x^3 \times x^5$ (ग) $ab^4 \times b^3$

(घ) $(a^2 b) \times (ab^3)$ (ङ) $3x^4 \times 2x^3$ (च) $(-2x^4) \times (3x^3)$

(छ) $(ab) \times (a^3 b^3) \times (a^2b)$

2. **घाताङ्कका नियम प्रयोग गरी सरल गर्नुहोस् :**

(क) $4^4 \div 4^2$ (ख) $x^8 \div x^5$ (ग) $a^4 b^4 \div a^3 b^3$

(घ) $(x^6 y^3) \div (x^3 y^3)$ (ङ) $8x^4 \div 2x^3$ (च) $16x^4 \div 8x^3$

3. **घाताङ्कका नियम प्रयोग गरी सरल गर्नुहोस् :**

(क) $(3a)^0$ (ख) $(2b)^3$ (ग) $(-3x)^4$ (घ) $(-4ab^2)^3$

(ङ) $(3a^3b^2)^2$ (च) $\left(\frac{x^2}{y^2}\right)^2$ (छ) $\frac{(3xy)^2}{3xy}$ (च) $\frac{a^{4n-2}}{a^{2(2n-1)}}$

4. **तलका चित्रहरूको छायाँ पारिएको भागको क्षेत्रफल निकाल्नुहोस् :**

(क) $\frac{2^2 \times 4^2}{8^2}$ (ख) $\frac{5^3 \times 125^3}{25^3}$ (ग) $\frac{4^4 \times 5^5}{25^3 \times 16^2}$

5. **खाली कोठामा उपयुक्त सङ्ख्या भर्नुहोस् :**

(क) $4^{\square} = 8^2$ (ख) $(3x^{\square})^2 = 9x^6$ (ग) $(4x)^{\square} = 1$

6. **प्रमाणित गर्नुहोस् :**

(क) $\dfrac{x^{m+n+2} \times x^{m+n+2}}{x^{2(m+n+1)}} = x^2$ (ख) $\dfrac{x^{p-q+1} \times x^{q-r+1} \times x^{r-p+1}}{x^3} = 1$

(ग) $(x^{a-b})^{a+b} \times (x^{b-c})^{b-c} \times (x^{c-a})^{c+a} = 1$

7. **यदि** $a = 2, b = 3, c = 1, m = 4$ र $n = 5$ **भए मान पत्ता लगाउनुहोस् :**

(क) $\dfrac{a^m \times b^n \times c^{ab}}{m^a \times n^b \times (b^a)^c}$

(ख) $(a + b + c)^{m+n} \div (m + n)^{a+b+c}$

परियोजना कार्य

एउटा बाल क्लबले जनचेतनामूलक समाचारलाई प्रचारप्रसार गर्नका लागि "एक दिनमा एक जना मानिसले उक्त समाचार थप 5 जनालाई भन्नु पर्ने छ र उक्त 5 जनाले फेरि अर्को दिन प्रत्येकले थप 5/5 जनालाई भन्नुपर्ने छ" । सो नियम पालना गरी एक जनाबाट भन्न सुरु गरेको समचार पाचौँ दिनसम्म कति जना मानिसबिच पुग्छ होला ? घाताङ्कको नियम प्रयोग गरी पत्ता लगाउनुहोस् र कक्षामा प्रस्तुत गर्नुहोस् ।

उत्तर

1. (क) 3^7 (ख) x^8 (ग) ab^7 (घ) $a^3 b^4$
   (ङ) $6x^7$ (च) $-6x^7$ (छ) $a^6 b^5$
2. (क) 4^2 (ख) x^3 (ग) ab (घ) x^3 (ङ) $4x$ (च) $2x$
3. (क) 1 (ख) $8b^3$ (ग) $81x^4$ (घ) $-64a^3b^6$ (ङ) $9a^6b^4$
   (च) $\dfrac{x^4}{y^4}$ (छ) $3xy$ (ज) 1
4. (क) 1 (ख) 5^6 (ग) $\dfrac{1}{5}$
5. (क) 4 (ख) 3 (ग) 0
6. शिक्षकलाई देखाउनुहोस् ।
7. (क) $\left(\dfrac{3}{5}\right)^3$ (ख) $\left(\dfrac{8}{3}\right)^3$

पाठ 10 बीजीय अभिव्यञ्जक (Algebraic Expression)

10.0 पुनरवलोकन (Review)

दिइएका प्रश्नलाई जोडीमा साथीसँग छलफल गर्नुहोस् :

(x+ 2y) m

$(2x + y)$ m

(क) एउटा आयातकार चउरको लम्बाइ $(2x + y)$ m र चौडाइ $(x + 2y)$ m भए यसको क्षेत्रफल कति हुन्छ होला ?

(ख) उक्त चउरको परिमिति कति हुन्छ होला ?

(ग) उक्त आयातकार चउरमा $(x + 2y)$ m लम्बाइ र y m चौडाइ भएको सानो फूलबारी बनाउने हो भने चउरको क्षेत्रफल भन्दा फूलबारीको क्षेत्रफल कतिले कम हुन्छ ?

(घ) यदि $x = 10$ र $y = 2$, भए उक्त चउर र फूलबारीको क्षेत्रफल कति कति हुन्छ ?

10.1 खण्डीकरण (Factorization)

क्रियाकलाप 1

तलका उदाहरणमा गुणनफल दिइएको छ । साथीसँग जोडीमा बसी अध्ययन गर्नुहोस् :

(अ) $x (x + 2) = x^2 + 2x$

(आ) $(x + 2) (x + 3) = x^2 + 5x + 6$

(इ) $(x + 2) (x – 1) = x^2 + x – 2$

माथिको उदाहरणका आधारमा निम्नलिखित प्रश्नहरूमा छलफल गर्नुहोस् :

(क) के x र $(x + 2)$ ले $x^2 + 2x$ लाई निःशेष भाग लाग्छ ? x र $(x + 2)$ लाई $x^2 + 2x$ को के भन्न मिल्छ ?

(ख) के $(x + 2)$ र $(x + 3)$ ले $x^2 + 5x + 6$ लाई निःशेष भाग लाग्छ ? $(x + 2)$ र

$(x + 3)$ लाई $x^2 + 5x + 6$ को के भन्न मिल्छ ?

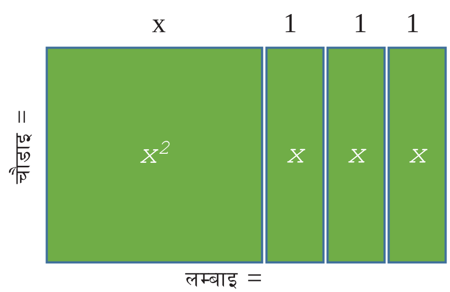
(ग) के $(x + 2)$ र $(x – 1)$ ले $x^2 + x – 2$ लाई नि:शेष भाग लाग्छ ? $(x + 2)$ र $(x – 1)$ लाई $x^2 + x – 2$ को के भन्न मिल्छ ?

कुनै बीजीय अभिव्यञ्जकलाई नि:शेष भाग जाने अरू बीजीय अभिव्यञ्जकलाई उक्त दिइएको बीजीय अभिव्यञ्जकका गुणनखण्डहरू भनिन्छ । कुनै बीजीय अभिव्यञ्जकलाई उसैका गुणनखण्डहरू गुणनका रूपमा व्यक्त गर्नुलाई नै खण्डीकरण (Factorization) गर्नु भनिन्छ ।

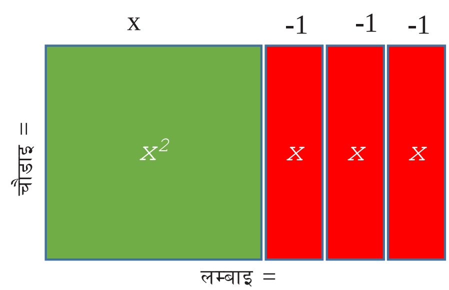
10.1.1 साझा गुणनखण्ड लिएर र पद एकत्रित गरेर खण्डीकरण

क्रियाकलाप 2

दिइएका बीजीय नमुनाहरूको अवलोकन गर्नुहोस् । अलग अलग पत्तीहरूको क्षेत्रफल दिइएको छ । हरियो रङ धनात्मक र रातो रङ ऋणात्मक जनाउन प्रयोग गरिएको छ । कक्षाकोठामा समूहमा छलफल गरी निष्कर्षमा पुग्नुहोस् ।



चित्र न. 1



चित्र न. 2

(क) चित्र न. 1 मा भएका सबै पत्तीहरूको जम्मा क्षेत्रफल कति कति हुन्छ ?

(ख) चित्र न. 2 मा भएका सबै पत्तीहरूको जम्मा क्षेत्रफल कति कति हुन्छ ?

(ग) चित्र न. 1 मा सबै पत्तीहरू जोड्दा बन्ने आयातको लम्बाइ र चौडाइ कति कति हुन्छ ?

(घ) चित्र न. 2 मा सबै पत्तीहरू जोड्दा बन्ने आयातको लम्बाइ र चौडाइ कति कति हुन्छ ?

यहाँ चित्र न. 1 मा एउटा धनात्मक x^2 र 3 ओटा धनात्मक x छन् । त्यसैले चित्र न. 1 मा भएका सबै पत्तीहरूको जम्मा क्षेत्रफल $x^2 + 3x$ हुन्छ । त्यसै गरी चित्र न. 2 मा एउटा धनात्मक x^2 र 3 ओटा ऋणात्मक x छन् । त्यसैले चित्र न. 2 मा भएका सबै पत्तीहरूको जम्मा क्षेत्रफल $x^2 - 3x$ हुन्छ ।

अब, चित्र न.1 मा भएका सबै पत्तीहरू जोड्दा बन्ने आयातको लम्बाइ $x + 3$ र चौडाइ x हुन्छ ।

त्यसैले $x^2 + 3x = x(x+3)$ भयो । यसलाई दुवै पदमा साझा x र बाँकी $(x+3)$ को गुणनफलको रूपमा लेख्न सकिन्छ । त्यसैगरी चित्र न. 2 मा भएका सबै पत्तीहरू जोड्दा बन्ने आयातको लम्बाइ $x - 3$ र चौडाइ x हुन्छ ।

त्यसैले $x^2 - 3x = x(x - 3)$ भयो । यसलाई दुवै पदमा साझा x र बाँकी $(x - 3)$ को गुणनफलको रूपमा लेख्न सकिन्छ ।

त्यस्तै, बहुपदीय अभिव्यञ्जकमा सबै पदहरूमा साझा गुणनखण्ड नभएमा साझा गुणनखण्ड भएका पदहरूलाई एकत्रित गरी साझा लिएर खण्डीकरण गरिन्छ । जस्तै : $2xy + 3 + 6x + y$ लाई पद एकत्रित गर्दा

$= 2xy + 6x + y + 3$

$= 2x(y + 3) + 1(y + 3)$

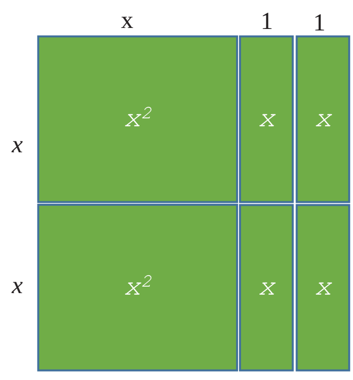
$= (2x + 1)(y + 3)$

उदाहरण 1

तलका अभिव्यञ्जकहरूको खण्डीकरण गर्नुहोस् :

(क) $2x^2 + 4x$

समाधान



$2x^2 + 4x$

यहाँ, $2x^2 + 4x$

$= 2x(x + 2)$ (दुवैमा $2x$ साझा छ ।)

$= 2x(x + 2)$

(ख) $a^2 - 15b - 5a + 3ab$

समाधान

यहाँ $a^2 - 15b - 5a + 3ab$

साझा आउने पदहरू मिलाउँदा,

$= a^2 - 5a + 3ab - 15b$

$= a(a - 5) + 3b(a - 5)$ [पहिलो दुई पदबाट a र दोस्रो दुई पदबाट $3b$ साझा लिँदा]

$= (a - 5)(a + 3b)$

अभ्यास 10.1.1

1. तलका अभिव्यञ्जकको खण्डीकरण गर्नुहोस् :

(क) $6x + 3$ (ख) $x^2 + 4x$ (ग) $12a + 3b$

(घ) $12p^2 + 6q^2$ (ङ) $14xy + 7y$ (च) $x + x^3$

(छ) $12x^2 + xy + xz$ (ज) $x^3 + x^2 + x$ (झ) $2x^2 - 2x^3 + 8x^4$

2. पद एकत्रित गरी खण्डीकरण गर्नुहोस् :

(क) $ax + bx + ay + by$ (ख) $2ab + a^2b - 2b - ab$

(ग) $x^2y - xy + 2x^2y - 2xy$ (घ) $x^2 + 3x + xy + 3y$

(ङ) $2ab + 3a + 2b^2 + 3b$ (च) $a - b + a^2 - ab$

(छ) $2a^2 + 5a - 6a - 15$ (ज) $2xa - x^2a + 2a - ax$

(झ) $x^2y + 4xy - xy^2 - 4y^2$ (ञ) $3x(x + y) + 3y(x + y)$

(ट) $2x^2 + 3ax + 2ax + 3a^2$

उत्तर

1. (क) $3(2x + 1)$ (ख) $x(x + 4)$ (ग) $3(4a + b)$ (घ) $6(2p^2 + q^2)$

(ङ) $7y(2x + 1)$ (च) $x(1 + x^2)$ (छ) $x(12x + y + z)$ (ज) $x(x^2 + x + 1)$

(झ) $2x^2(1 - x + 4x^2)$

2. (क) $(a + b)(x + y)$ (ख) $b(2 + a)(2a - 1)$ (ग) $3xy(x - 1)$

(घ) $(x + 3)(x + y)$ (ङ) $(a + b)(2b + 3)$ (च) $(a - b)(a + 1)$

(छ) $(a - 3)(2a + 5)$ (ज) $a(x - 1)(2 - x)$ (झ) $y(x+4)(x - y)$

(ञ) $3(x + y)(x + y)$ (ट) $(x + a)(2x + 3a)$

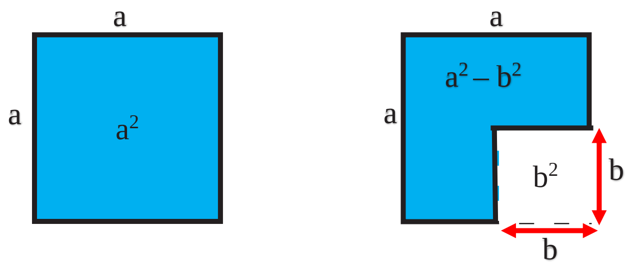
10.1.2 $(a^2 - b^2)$ स्वरूपका अभिव्यञ्जकको खण्डीकरण

क्रियाकलाप 2

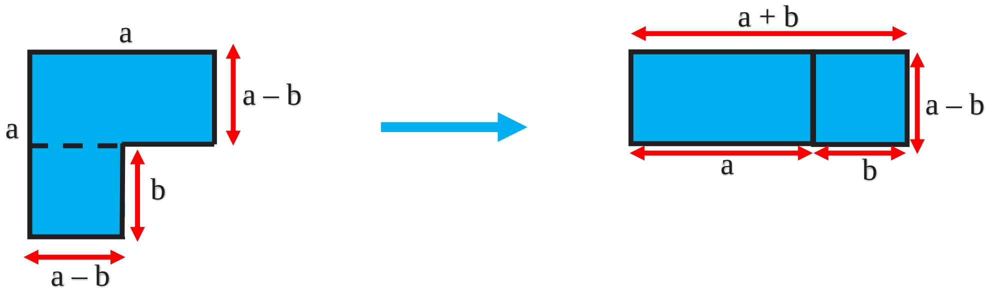
जोडीमा बसी निम्नानुसारको क्रियाकलाप गर्नुहोस् :

(क) a एकाइ लम्बाइ भएको एउटा वर्गाकार कागज लिनुहोस् । यसको क्षेत्रफल a^2 हुन्छ ।

(ख) अब चित्रमा देखाए जस्तै गरी b एकाइ लम्बाइ भएको वर्ग काटेर निकाल्नुहोस् ।



(ग) a^2 क्षेत्रफल भएको वर्गाकार कागजबाट b^2 क्षेत्रफल भएको वर्ग घटाउँदा $a^2 - b^2$ क्षेत्रफल बाँकी रहन्छ । फेरि तल चित्रमा देखाए जस्तै दुई भागमा विभाजन गरी आयतकार हुने गरी मिलाउनुहोस् ।



यसरी बनेको आयतकार सतहको लम्बाइ कति होला ?

आयतकार सतहको चौडाइ कति होला ?

अब बनेको आयतकार कागजको लम्बाइ र चौडाइ छलफल गरी पत्ता लगाउनुहोस् ।

यहाँ आयतकार सतहको क्षेत्रफल $= a^2 - b^2$

आयतकार सतहको लम्बाइ $= (a + b)$

आयतकार सतहको चौडाइ $= (a - b)$

तसर्थ,

आयतकार सतहको क्षेत्रफल = लम्बाइ × चौडाइ

$$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$$

उदाहरण 1

खण्डीकरण गर्नुहोस् :

(क) $a^2 - 16$ (ख) $25x^2 - 36y^2$ (ग) $p^2 - \frac{1}{49q^2}$

समाधान

यहाँ, $a^2 - 16$

$= a^2 - (4)^2$

$= (a - 4)(a + 4)$ [$\because a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$]

(ख) $25x^2 - 36y^2$

$= (5x)^2 - (6y)^2$

$= (5x + 6y)(5x - 6y)$ [$\because a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$]

(ग) $p^2 - \frac{1}{49q^2}$

$= (p)^2 - \left(\frac{1}{7q}\right)^2$

$= (p + \frac{1}{7q})(p - \frac{1}{7q})$ [$\because a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$]

अभ्यास 10.1.2

1. **खण्डीकरण गर्नुहोस् :**

(क) $x^2 - 4$ (ख) $a^2 - 4b^2$ (ग) $9x^2 - y^2$

(घ) $5x^2 - 20y^2$ (ङ) $13a^2 - 117b^2$ (च) $25 - \frac{1}{9y^2}$

(छ) $121x^2 - \frac{1}{y^2}$ (ज) $2p^2 - \frac{50}{q^2}$ (झ) $72 - 2b^2$

(ञ) $121 - 25y^2$ (ट) $\frac{15}{a^2} - 60a^2$ (ठ) $81 - 64y^2$

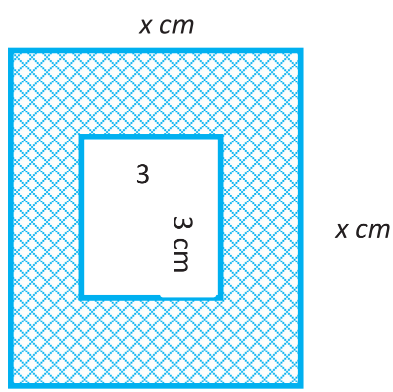
(ड) $4x^3y - 81xy^3$ (ढ) $169 - 196z^2$ (ण) $ab^3 - 9a^3b$

(त) $\frac{49}{121}x^2 - \frac{64}{9}y^2$ (थ) $zx^2 - zy^2$ (द) $(x+2)^2 - 4$

(ध) $256 - \frac{x^2}{4}$ (न) $1 - \frac{81p^2}{121q^2}$ (प) $3(x-y)^2 - 12$

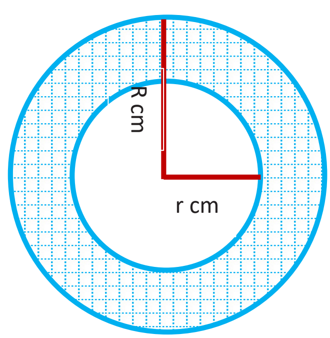
(फ) $9(x-1)^2 - 16(x+2)^2$

2. दिइएको चित्रमा छाया परेको भागको क्षेत्रफल कति होला ?



3. x m लम्बाइ भएको वर्गाकार बगैँचाको बिचमा 6 मिटर किनारा भएको वर्गाकार पोखरी छ भने पोखरीबाहेकको बगैँचाको क्षेत्रफल कति होला ?

4. सँगैको चित्र अवलोकन गर्नुहोस् :



(क) छाया पारिएको भागको क्षेत्रफल कति होला ? (जहाँ वृत्तको क्षेत्रफल = πr^2 हुन्छ ।)

(ख) यदि उक्त चित्रमा R = 5 cm र r = 3 cm भए छाया पारिएको भागको क्षेत्रफल पत्ता लगाउनुहोस् ।

उत्तर

1. (क) $(x + 2)(x - 2)$ (ख) $(a + 2b)(a - 2b)$ (ग) $(3x + y)(3x - y)$

(घ) $5(x + 2y)(x - 2y)$ (ङ) $13(a + 3b)(a - 3b)$ (च) $(5 + \frac{1}{3y})(5 - \frac{1}{3y})$

(छ) $(11x + \frac{1}{y})(11x - \frac{1}{y})$ (ज) $2(p + \frac{5}{q})(p - \frac{5}{q})$

(झ) $2(6 + b)(6 - b)$ (ञ) $(11 + 5y)(11 - 5y)$

(ट) $15(\frac{1}{a} + 2a)(\frac{1}{a} - 2a)$ (ठ) $(9 + 8y)(9 - 8y)$

(ड) $xy(2x + 9y)(2x - 9y)$ (ढ) $(13 + 14z)(13 - 14z)$

(ण) $ab(b + 3a)(b - 3a)$ (त) $(\frac{7x}{11} + \frac{8y}{3})(\frac{7x}{11} - \frac{8y}{3})$

(थ) $z(x + y)(x - y)$ (द) $x(x + 4)$

(ध) $(16 + \frac{x}{2})(16 - \frac{x}{2})$ न) $(1 + \frac{9p}{11q})(1 - \frac{9p}{11q})$

(प) $3(x - y + 2)(x - y - 2)$ (फ) $-(7x + 5)(x + 11)$

2. $(x + 3)(x - 3)$ 3. $(x + 6)(x - 6)$

4. $\pi(R + r)(R - r)$ 5. $50.28\ cm^2$

10.1.3 पूर्ण वर्ग हुने त्रिपदीय अभिव्यञ्जकहरूको खण्डीकरण

क्रियाकलाप 4

छलफल गर्नुहोस् :

(क) $(a + b)^2$ को विस्तारित रूप के हुन्छ ?

(ख) $(a - b)^2$ को विस्तारित रूप के हुन्छ ?

यहाँ,

$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ हुन्छ । त्यस्तै, $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ हुन्छ ।

यसलाई $a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2 = (a + b)(a + b)$ र

$a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2 = (a - b)(a - b)$ लेख्न सकिन्छ ।

(क) बिजीय अभिव्यञ्जक $a^2 + 2ab + b^2$ स्वरूपमा भए यसलाई $(a + b)^2$ मा लेख्न सकिन्छ । यसलाई गुणनखण्डको रूपमा $(a + b)(a + b)$ लेखिन्छ ।

(ख) यस्तै $a^2 - 2ab + b^2$ स्वरूपको अभिव्यञ्जक भए यसलाई $(a + b)^2$ मा लेख्न सकिन्छ । यसलाई गुणनखण्डका रूपमा $(a + b)(a + b)$ लेखिन्छ ।

उदाहरण 1

पूर्ण वर्ग बनाउन तलका खाली ठाउँमा कति राख्नुपर्ला ?

(क) $x^2 + \ldots + 16$ (ख) $9a^2 - \ldots + 49b^2$

समाधान

(क) यहाँ, $x^2 + \ldots + 16$

$= x^2 + \ldots + (4)^2$ (पहिलो पद र तेस्रो पदलाई पूर्ण वर्ग बनाउँदा)

$= (x)^2 + 2 \times x \times 4 + (4)^2$ [$a^2 + 2ab + b^2$ को स्वरूपमा लेख्दा]

$= (x + 4)^2$

$\therefore x^2 + \ldots + 16$ लाई पूर्ण वर्ग बनाउन खाली ठाउँमा $2 \times x \times 4 = 8x$ राख्नुपर्छ ।

(ख) $9a^2 - \ldots + 49b^2$

समाधान

(क) यहाँ, $9a^2 - \ldots + 49b^2$

$= (3a)^2 + \ldots + (7b)^2$ (पहिलो पद र तेस्रो पदलाई पूर्ण वर्ग बनाउँदा)

$= (3a + 7b)^2$ [$a^2 - 2ab + b^2$ को स्वरूपमा लेख्दा]

$\therefore 9a^2 - \ldots + 49b^2$ लाई पूर्ण वर्ग बनाउन खाली ठाउँमा $2 \times 3a \times 7b = 42ab$ राख्नुपर्छ ।

उदाहरण 2

खण्डीकरण गर्नुहोस् :

(क) $4x^2 + 12x + 9$ (ख) $36a^2 - 48ab + 16b^2$

समाधान

(क) यहाँ, $4x^2 + 12x + 9$

$= (2x)^2 + 2 \times 2x \times 3 + (3)^2$ [$a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$ सँग तुलना गर्दा]

$= (2x + 3)^2$

$= (2x + 3)(2x + 3)$

(ख) $36a^2 - 48ab + 16b^2$

समाधान

$= 4(9a^2 - 12ab + 4b^2)$

$= 4\{(3a)^2 - 2 \times 3a \times 2b + (2b)^2\}$

$= 4(3a - 2b)^2$ [$a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2$ को स्वरूपमा लेख्दा]

$= 4(3a - 2b)(3a - 2b)$

उदाहरण 3

खण्डीकरण गर्नुहोस् :

(क) $16x^2 + 40x + 25 - y^2$

समाधान

यहाँ, $16x^2 + 40x + 25 - y^2$

$= (4x)^2 + 2 \times 4x \times 5 + (5)^2 - y^2$

$= (4x + 5)^2 - y^2$

$= (4x + 5 + y)(4x + 5 - y)$

$= (4x + y + 5)(4x - y + 5)$

अभ्यास 10.1.3

1. **खाली ठाउँमा उपयुक्त पद भरी पूर्ण वर्ग बनाउनुहोस् :**

(क) $x^2 + ... + 16$ (ख) $4a^2 + ... + y^2$ (ग) $p^2 - ..... + 36$

(घ) $9a^2 - .... + 16b^2$ (ङ) $25p^2 - ...... + 49q^2$ (च) $p^2 + ... + \frac{4}{p^2}$

(छ) $225x^2 - ... + 64y^2$ (ज) $1 + ... + 36y^2$ (झ) $p^2 - ..... + \frac{1}{p^2}$

2. **खण्डीकरण गर्नुहोस् :**

(क) $a^2 + 12a + 36$ (ख) $y^2 + 14y + 49$ (ग) $p^2 + 22p + 121$

(क) $a^2 + 12a + 36$ (ख) $y^2 + 14y + 49$ (ग) $p^2 + 22p + 121$

(घ) $4a^2 + 20a + 25$ (ङ) $9r^2 + 60r + 100$ (च) $36x^2 + 84x + 49$

(छ) $x^2 - 8x + 16$ (ज) $a^2 - 18a + 81$ (झ) $p^2 - 26p + 169$

(ञ) $9a^2 - 30a + 25$ (ट) $25y^2 - 60y + 36$ (ठ) $49r^2 - 70r + 25$

(ड) $4p^2 + 24pq + 36q^2$ (ढ) $9a^2 + 42ab + 49b^2$ (ण) $\frac{x^2}{16} - xy + 4y^2$

(त) $25a^2 - 40ab + 16b^2$ (थ) $49q^2 - 70qr + 25r^2$ (द) $25x^2 - 2xy + \frac{y^2}{25}$

3. खण्डीकरण गर्नुहोस् :

(क) $a^2 + 12a + 36 - b^2$ (ख) $y^2 + 16y + 64 - z^2$

(ग) $p^2 + 26p + 169 - 9q^2$ (घ) $4a^2 - b^2 + 20b - 100$

(ङ) $9r^2 - s^2 - 6s - 9$

उत्तर

1. (क) $8x$ (ख) $4ay$ (ग) $12p$

   (घ) $24ab$ (ङ) $70pq$ (च) 4

   (छ) $240xy$ (ज) $12y$ (झ) 2

2. (क) $(a + 6)^2$ (ख) $(y + 7)^2$ (ग) $(p + 11)^2$

   (घ) $(2a + 5)^2$ (ङ) $(3r + 10)^2$ (च) $(6x + 7)^2$

   (छ) $(x - 4)^2$ (ज) $(a - 9)^2$ (झ) $(p - 13)^2$

   (ञ) $(3a - 5)^2$ (ट) $(5y - 6)^2$ (ठ) $(7r - 5)^2$

   (ड) $(2p + 6q)^2$ (ढ) $(3a + 7b)^2$ (ण) $(\frac{x}{4} - 2y)^2$

   (त) $(5a - 4b)^2$ (थ) $(7q - 5r)^2$ (द) $(5x - \frac{y}{5})^2$

3. (क) $(a + b + 6)(a - b + 6)$ (ख) $(y + z + 8)(y - z + 8)$

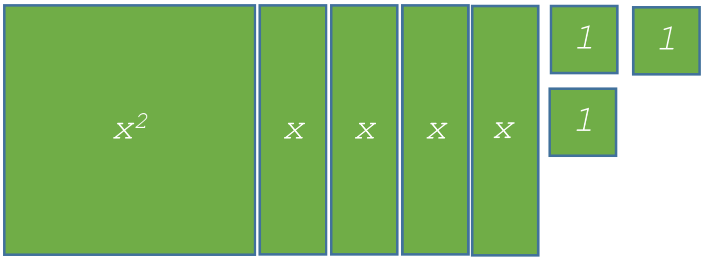
   (ग) $(p + 3q + 13)(p - 3q + 13)$ (घ) $(2a + b - 10)(2a - b + 10)$

   (ङ) $(3r + s + 3)(3r - s - 3)$

10.1.4 $ax^2 + bx + c$ स्वरूपका अभिव्यञ्जकहरूको खण्डीकरण

क्रियाकलाप 5

दिइएका बीजीय पत्तीहरू (Algebraic tiles) लाई मिलाएर आयत कसरी बनाउन सकिएला समूहमा छलफल गर्नुहोस् ।



यहाँ एउटा x^2, 4 ओटा x र 3 ओटा 1 (एकाइ वर्ग) रहेका छन् । बीजीय पत्तीहरूलाई मिलाएर आयत बनाउँदा,

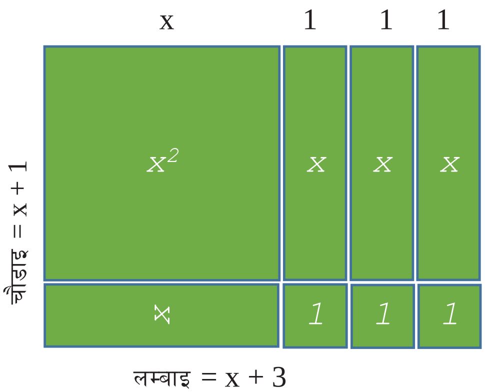
जम्मा क्षेत्रफल = $x^2 + 4x + 3$

लम्बाइ = $x + 3$

चौडाइ = $x + 1$

तसर्थ $x^2 + 4x + 3$ लाई खण्डीकरण गर्दा

$x^2 + 4x + 3 = (x + 1)(x + 3)$ हुन्छ ।



यहाँ $(x + 1)(x + 3) = x(x + 1) + 3(x + 1)$

$= x^2 + x + 3x + 3$

$= x^2 + (1 + 3)x + 3$

$= x^2 + 4x + 3$ हुन्छ ।

फेरि यसलाई विपरीत तिरबाट लेख्दा,

$x^2 + 4x + 3$

$= x^2 + (1 + 3)x + 3$

$= x^2 + x + 3x + 3$

$= x(x + 1) + 3(x + 1)$

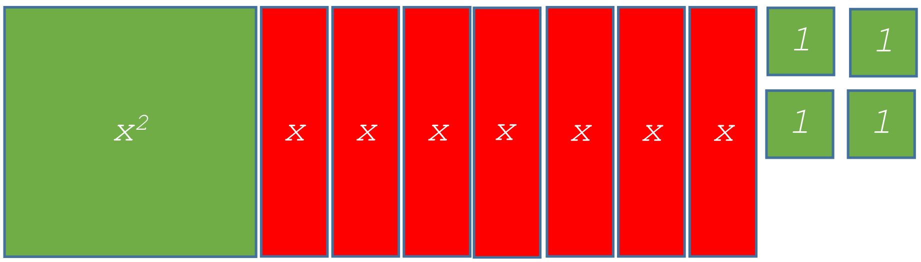
$= (x + 1)(x + 3)$

$x^2 + 4x + 3$ लाई खण्डीकरण गर्दा दोस्रो पदमा रहेको x को गुणाङ्क 4 को सट्टामा $(1 + 3)$ लेख्न सक्छौँ, तर कसरी ?

हामीलाई थाहा छ, $3 = 1 \times 3$ र $1 + 3 = 4$ हुन्छ । त्यसैले 3 लाई दुई भागमा 1 र 3 मा टुक्राइएको छ जसको योगफल 4 र गुणनफल 3 हुन्छ ।

क्रियाकलाप 6

दिइएका बीजीय पत्तीहरूको प्रयोग गरी आयात बनाउने क्रियाकलाप समूहमा छलफल गरी लम्बाइ र चौडाइ पत्ता लगाउनुहोस् :



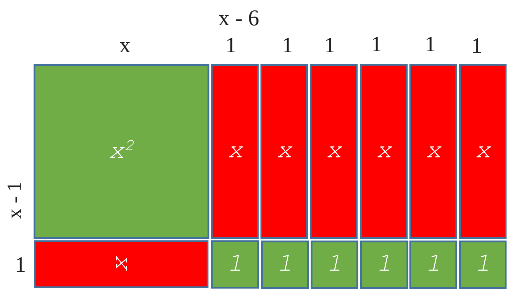
यहाँ एउटा धनात्मक x^2, 7 ओटा ऋणात्मक x र 6 ओटा धनात्मक 1 (एकाइ वर्ग) रहेका छन् । बीजीय पत्तीहरूलाई मिलाएर आयत बनाउँदा,

जम्मा क्षेत्रफल = $x^2 - 7x + 6$

तसर्थ $x^2 - 7x + 6$ लाई खण्डीकरण गर्दा

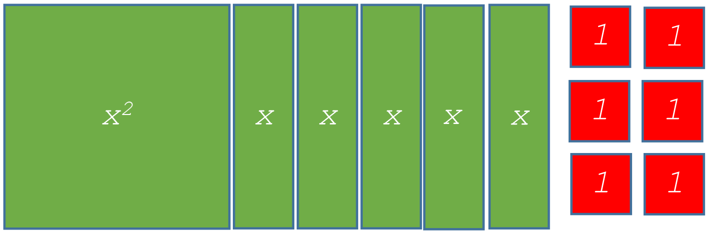
$x^2 - 7x + 6 = (x - 6)(x - 1)$ हुन्छ ।

$$\begin{aligned} & x^2 - 7x + 6 \\ &= x^2 - (6 + 1)\, x + 6 \\ &= x^2 - 6x - x + 6 \\ &= x\,(x - 6) - 1(x - 6) \\ &= (x - 6)\,(x - 1) \end{aligned}$$



क्रियाकलाप 7

दिइएका बीजीय पत्तीहरूको प्रयोग गरी आयात बनाउने क्रियाकलाप समूहमा छलफल गरी प्राप्त अभिव्यञ्जकलाई खण्डीकरण गर्नुहोस् ।



यहाँ एउटा धनात्मक x^2, 5 ओटा धनात्मक x र 6 ओटा ऋणात्मक 1 (एकाइ वर्ग) रहेका छन् । बीजीय पत्तीहरूलाई मिलाएर आयत बनाउँदा,

दिइएका बीजीय पत्तीहरूले आयत नबनेको हुनाले एउटा धनात्मक x र एउटा ऋणात्मक x का पत्तीहरू थप गरिएको छ । धनात्मक र ऋणात्मक बराबर थप्दा परिमाणमा फरक पर्दैन ।

जम्मा क्षेत्रफल = $x^2 + 5x - 6$

तसर्थ $x^2 + 5x - 6$ लाई खण्डीकरण गर्दा

$x^2 + 5x - 6 = (x + 6)(x - 1)$ हुन्छ ।

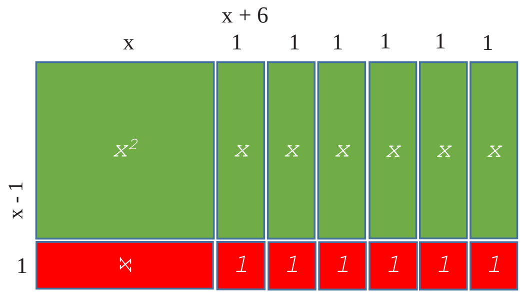
$x^2 + 5x - 6$

$= x^2 + (6 - 1)\, x - 6$

$= x^2 + 6x - x - 6$

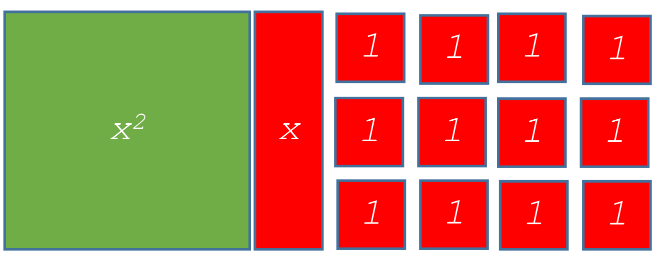
$= x\,(x + 6) - 1(x + 6)$

$= (x + 6)\,(x - 1)$



क्रियाकलाप 8

दिइएका बीजीय पत्तीहरूको प्रयोग गरी आयात बनाउने क्रियाकलाप समूहमा छलफल गरी प्राप्त अभिव्यञ्जकलाई खण्डीकरण गर्नुहोस् ।



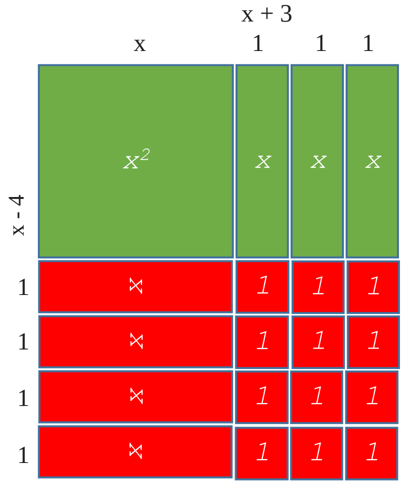
यहाँ एउटा धनात्मक x^2, एउटा ऋणात्मक x र 12 ओटा ऋणात्मक 1 (एकाइ वर्ग) रहेका छन् । बीजीय पत्तीहरूलाई मिलाएर आयत बनाउँदा,

दिइएका पत्तीहरूले आयत नबनेका हुनाले 3 ओटा धनात्मक x र 3 ओटा ऋणात्मक x का पत्तीहरू थप गरिएको छ । धनात्मक र ऋणात्मक बराबर थप्दा परिमाणमा फरक पर्दैन ।

जम्मा क्षेत्रफल = $x^2 - x - 12$

तसर्थ $x^2 - x - 12$ लाई खण्डीकरण गर्दा,

$x^2 - x - 12 = (x - 4)(x + 3)$ हुन्छ ।



$$
\begin{aligned}
& x^2 - x - 12 \\
&= x^2 - (4 - 3)x - 12 \\
&= x^2 - 4x + 3x - 12 \\
&= x(x - 4) + 3(x - 4) \\
&= (x - 4)(x + 3)
\end{aligned}
$$

$ax^2 + bx + c$ स्वरूपका अभिव्यञ्जकहरूको खण्डीकरण गर्दा,

(क) सर्व प्रथम a र c को गुणनफल पत्ता लगाउने ।

(ख) गुणन गर्दा a र c को गुणनफलसँग बराबर हुने अवस्थाहरू मध्ये c धनात्मक भएमा जोड्दा र ऋणात्मक भएमा घटाउँदा b हुने अवस्था पत्ता लगाउने, जस्तै:

(अ) $x^2 + 5x + 6$ मा $a = 1, b = 5$ र $c = 6$ छ । 1 र 6 को गुणनफल 6 छ । $c = 6$ धनात्मक भएकाले जोड्दा 5 हुने र गुणन गर्दा 6 हुने दुईओटा सङ्ख्या 3 र 2 हुन् ।

(आ) $x^2 + 5x - 6$ मा $a = 1, b = 5$ र $c = 6$ छ । 1 र 6 को गुणनफल 6 छ । $c = -6$ ऋणात्मक भएकाले घटाउँदा अन्तर 5 हुने र गुणन गर्दा 6 हुने दुईओटा सङ्ख्या 6 र 1 हुन् ।

(ग) पहिलो दुईओटा पदबाट र पछिल्लो दुईओटा पदबाट साझा लिइ गुणन खण्ड पत्ता लगाउने,

यसरी $ax^2 + bx + c$ स्वरूपका अभिव्यञ्जकहरूको खण्डीकरण गर्न सकिन्छ ।

उदाहरण 1

दुई सङ्ख्याहरू पत्ता लगाउनुहोस् जसको गुणनफल P र योगफल S छ ।

(क) P = 12, S = 7 (ख) P = 24, S = 11

समाधान

यहाँ,

	गुणनफल (P)	योगफल (S)	आवश्यक सङ्ख्याहरू
p = 12	1 × 12	1+12 = 13	3 र 4
	2 × 6	2+6 = 8	
	3 × 4	3+4 = 7	
p = 24	1 × 24	1+24 = 25	3 र 8
	2 × 12	2+12 = 14	
	3 × 8	3+8 = 11	
	4 × 6	4+6= 10	

उदाहरण 2

खण्डीकरण गर्नुहोस् :

(क) $x^2 + 5x + 6$ (ख) $x^2 - 6x + 5$

समाधान

यहाँ $x^2 + 5x + 6$

$= x^2 + (2 + 3)\, x + 6$ (दुई सङ्ख्या जसको गुणनफल 6 र योगफल 5 हुने सङ्ख्याहरू 2 र 3 हुन् ।)

$= x^2 + 2x + 3x + 6$

$= x\,(x + 2) + 3\,(x + 2)$

$= (x + 2)\,(x + 3)$

(ख) $x^2 - 6x + 5$

$= x^2 - (1 + 5)\, x + 5$ (दुई सङ्ख्याहरू जसको गुणनफल 5 र योगफल 6 हुने सङ्ख्याहरू 1 र 5 हुन् ।)

$= x^2 - x - 5x + 5$

$= x\,(x - 1) - 5\,(x - 1)$

$= (x - 1)\,(x - 5)$

उदाहरण 3

दुई सङ्ख्या पत्ता लगाउनुहोस् जसको गुणनफल P र अन्तर D छ ।

(क) P = 12, D = 1 (ख) P = 24, D = 10

समाधान

यहाँ,

	गुणनफल (P)	अन्तर (D)	आवश्यक सङ्ख्याहरू
p = 12	1 × 12	12 –1 = 11	4 र 3
	2 × 6	6 – 6 = 0	
	3 × 4	4 – 3 = 1	
p = 24	1 × 24	24 – 1 = 23	12 र 2
	2 × 12	12 – 2 = 10	
	3 × 8	8 – 1 = 9	
	4 × 6	6 – 4 = 2	

उदाहरण 4

खण्डीकरण गर्नुहोस् :

(क) $x^2 + 5x - 6$ (ख) $x^2 - 6x - 16$

समाधान

यहाँ $x^2 + 5x - 6$ (दुई सङ्ख्याहरू जसको गुणनफल 6 र अन्तर 5 हुने सङ्ख्याहरू 6 र 1 हुन् ।)

$= x^2 + 6x - x - 6$

$= x (x + 6) - 1(x + 6)$

$= (x + 6) (x - 1)$

(ख) $x^2 - 6x - 16$

$= x^2 - (8 - 2)x - 16$ (दुई सङ्ख्या जसको गुणनफल 16 र अन्तर 6 हुने सङ्ख्याहरू 8 र 2 हुन् ।)

$= x^2 - 8x + 2x - 16$

$= x (x - 8) + 2 (x - 8)$

$= (x - 8) (x + 2)$

उदाहरण 5

खण्डीकरण गर्नुहोस् :

(क) $3x^2 + 11x + 6$ (ख) $2x^2 - 5x - 18$

समाधान

यहाँ $3x^2 + 11x + 6$

$= 3x^2 + (9 + 2)\,x + 6$

$= 3x^2 + 9x + 2x + 6$

$= 3x\,(x + 3) + 2(x + 3)$

$= (x + 3)\,(3x + 2)$

गुणन गर्दा $= 3 \times 6 = 18$ हुने र जोड्दा 11 हुने
$18 = 1 \times 18,\ 2 \times 9,\ 3 \times 6$
$11 = 9 + 2$

(ख) $2x^2 - 5x - 18$

समाधान

यहाँ $2x^2 - 5x - 18$

$= 2x^2 - (9 - 4)\,x - 18$

$= 2x^2 - 9x + 4x - 18$

$= x\,(2x - 9) + 2\,(2x - 9)$

$= (2x - 9)\,(x + 2)$

गुणन गर्दा $= 18 \times 2 = 36$ हुने र अन्तर 5 हुने
$36 = 36 \times 1,\ 18 \times 2,\ 12 \times 3,\ 9 \times 4,\ 6 \times 6,\ 9 - 4 = 5$

अभ्यास 10.1.4

1. दुई सङ्ख्या पत्ता लगाउनुहोस् जसको गुणनफल P र योगफल S छ ।

(क) P = 2, S = 3 (ख) P = 3, S = 4 (ग) P = 8, S = 6

(घ) P = 15, S = 8 (ङ) P = 10, S = 7 (च) P = 20, S = 9

(छ) P = 45, S = 18 (ज) P = 56, S = 18 (झ) P = 160, S = 28

2. दुई सङ्ख्या पत्ता लगाउनुहोस् जसको गुणनफल P र अन्तर S छ ।

(क) P = 2, D = 1 (ख) P = 4, D = 3 (ग) P = 8, D = 2

(घ) P = 16, D = 6 (ङ) P = 20, D = 1 (च) P = 20, D = 8

(छ) P = 36, D = 5 (ज) P = 80, D = 16 (झ) P = 96, D = 10

3. **खण्डीकरण गर्नुहोस् :**

(क) $x^2 + 5x + 4$ (ख) $x^2 + 3x + 2$ (ग) $x^2 - 5x + 6$

(घ) $y^2 + 5y + 6$ (ङ) $x^2 + 7x + 12$ (च) $a^2 - 3a + 2$

(छ) $a^2 - 6a + 8$ (ज) $b^2 - 5b + 6$ (झ) $b^2 + 13b + 42$

(ञ) $b^2 - 13b + 40$ (ट) $z^2 - 13z + 36$ (ठ) $x^2 - 15x + 56$

(ड) $x^2 - 15x + 54$ (ढ) $z^2 + 15z + 44$ (ण) $b^2 - 12b + 36$

(त) $b^2 + 15b + 56$ (थ) $z^2 - 12z + 27$ (द) $x^2 - 23x + 102$

(ध) $(a + b)^2 + 11(a + b) + 18$ (न) $(x + y)^2 - 15(x + y) + 36$

4. **खण्डीकरण गर्नुहोस् :**

(क) $x^2 + 4x - 21$ (ख) $x^2 + x - 20$ (ग) $x^2 + 3x - 28$

(घ) $y^2 - 6y - 27$ (ङ) $x^2 + 7x - 18$ (च) $a^2 + 10a - 39$

(छ) $a^2 - a - 132$ (ज) $b^2 - 8b - 65$ (झ) $b^2 + 3b - 108$

(ञ) $b^2 - 7b - 120$ (ट) $z^2 - 29z - 132$ (ठ) $x^2 + xy - 240y^2$

(ड) $35 - 2x - x^2$ (ढ) $96 - 4z - z^2$ (ण) $72 + b - b^2$

(त) $(a + b)^2 + 5(a + b) - 36$ (थ) $(x + y)^2 - 9(x + y) - 112$

5. **खण्डीकरण गर्नुहोस् :**

(क) $3x^2 + 5x + 2$ (ख) $3x^2 - 4x + 1$ (ग) $7x^2 - 30x + 8$

(घ) $4a^2 - 8a + 3$ (ङ) $15p^2 - 13p + 2$ (च) $12a^2 - 32a + 5$

(छ) $5x^2 - 14x - 3$ (ज) $10x^2 - 3x - 1$ (झ) $15p^2 - 13p + 2$

(ञ) $6b^2 - 4b - 10$ (ट) $21x^2 + 25x + 4$ (ठ) $12a^2 + 28ab - 5b^2$

(ड) $16a^2 + 24ab + 9b^2$ (ढ) $6x^2 + xy - 7y^2$ (ण) $3a^2 - ab - 10b^2$

(त) $6p^2q + 30pq + 36q$ (थ) $6a^2 + 35ab - 6b^2$ (द) $6a^2 - 5ab - 6b^2$

(ध) $4 + 17x - 15x^2$ (न) $6 - 13a + 6a^2$ (प) $28 - 31b - 5b^2$

परियोजना कार्य

1. बीजीय पत्तीहरूको प्रयोग गरेर $x^2 - 4$, $x^2 + 8x + 16$ खण्डीकरण गरी चार्टपेपरमा टाँसी कक्षाकोठामा प्रस्तुत गर्नुहोस् ।
2. बीजीय पत्तीहरूको प्रयोग गरेर $x^2 - 10x + 21$ खण्डीकरण गरी चार्टपेपरमा टाँसी कक्षा कोठामा प्रस्तुत गर्नुहोस् ।
3. बीजीय पत्तीहरूको प्रयोग गरेर $x^2 + 2x - 15$ खण्डीकरण गरी चार्ट पेपरमा टाँसी कक्षा कोठामा प्रस्तुत गर्नुहोस् ।
4. बीजीय पत्तीहरूको प्रयोग गरेर $2x^2 - x - 3$ खण्डीकरण गरी चार्ट पेपरमा टाँसी कक्षा कोठामा प्रस्तुत गर्नुहोस् ।

उत्तर

1. (क) 1 र 2 (ख) 1 र 3 (ग) 4 र 2 (घ) 3 र 5 (ङ) 2 र 5
(च) 4 र 5 (छ) 3 र 15 ज) 14 र 4 (झ) 8 र 20
2. (क) 2 र 1 (ख) 4 र 1 (ग) 4 र 2 (घ) 8 र 2 (ङ) 5 र 4
(च) 10 र 2 (छ) 9 र 4 (ज) 20 र 4 (झ) 16 र 6
3. (क) $(x + 1) (x + 4)$ (ख) $(x + 1) (x + 2)$ (ग) $(x - 2) (x - 3)$
(घ) $(y + 2) (y + 3)$ (ङ) $(x + 3) (x + 4)$ (च) $(a - 1) (a - 2)$
(छ) $(a - 4) (a - 2)$ (ज) $(b - 2) (b - 3)$ (झ) $(b + 6)(b + 7)$
(ञ) $(b - 8) (b - 5)$ (ट) $(z - 4) (z - 9)$ (ठ) $(x - 7) (x - 8)$
(ड) $(x - 6) (x - 9)$ (ढ) $(z + 11) (z + 4)$ (ण) $(b - 6) (b - 6)$
(त) $(b + 7) (b + 8)$ (थ) $(z - 3) (z - 9)$ (द) $(x - 6) (x - 17)$
(ध) $(a + b +2)(a + b + 9)$ (न) $(x + y - 3)(x + y - 12)$
4. (क) $(x + 7) (x - 3)$ (ख) $(x + 5) (x - 4)$ (ग) $(x + 7) (x - 4)$
(घ) $(y - 9) (y + 3)$ (ङ) $(x + 9) (x - 2)$ (च) $(a - 13) (x + 3)$
(छ) $(a - 12) (a + 11)$ (ज) $(b - 13) (b + 5)$ (झ) $(b + 12) (b - 9)$
(ञ) $(b + 8) (b - 15)$ (ट) $(z - 33) (z + 4)$ (ठ) $(x + 16) (x - 15)$
(ड) $(5 - x) (x + 7)$ (ढ) $(8 - z) (z + 12)$ (ण) $(8 + b) (9 - b)$
(त) $(a + b - 4) (a + b + 9)$ (थ) $(x + y - 16)(x + y + 7)$

5. (क) $(3x + 2)(x + 1)$ (ख) $(3x - 1)(x - 1)$ (ग) $(x - 4)(7x - 2)$

(घ) $(2a - 3)(2a - 1)$ (ङ) $(5p - 1)(3p - 2)$ (च) $(2a - 5)(6a - 1)$

(छ) $(5x + 1)(x - 3)$ (ज) $(5x + 1)(2x - 1)$ (झ) $(3p - 2)(5p - 1)$

(ञ) $(3b - 5)(2b + 2)$ (ट) $(21x+4)(x+1)$ (ठ) $(2a + 5b)(6a - b)$

(ड) $(4a + 3b)^2$ (ढ) $(6x + 7y)(x - y)$ (ण) $(3a + 5b)(a - 2b)$

(त) $6q(p + 2)(p + 3)$ (थ) $(6a - b)(a + 6b)$ (द) $(3a + 2b)(2a - 3b)$

(ध) $(4 - 3x)(1 + 5x)$ (न) $(2 - 3a)(3 - 2a)$ (प) $(7 + b)(4 - 5b)$

10.2 बीजीय अभिव्यञ्जकहरूको महत्तम समापवर्तक (Highest common factor of algebraic expressions)

क्रियाकलाप 9

दिइएका सङ्ख्याहरूको महत्तम समापवर्तक (म.स.) पत्ता लगाउने क्रियाकलाप कक्षा ७ मा दुई तरिकाबाट गरिसकिएको छ । उक्त दुई तरिकाका आधारमा दुई दुई जनाको समूहमा छलफल गरी 12 र 18 को म. स. पत्ता लगाउनुहोस् ।

12 र 18 को रूढ खण्डीकरण विधिबाट म.स. पत्ता लगाउँदा

$12 = 2 \times 2 \times 3$

$18 = 2 \times 3 \times 3$

म.स. = साझा गुणनखण्ड $= 2 \times 3 = 6$

फेरि 12 र 18 को भाग विधिबाट म.स. पत्ता लगाउँदा,

```
12 ) 18(1
    - 12
      6) 18(3
        -18
          0
```

अत: 12 र 18 को म.स. = 6

क्रियाकलाप 10

x^3 र x^5 को म.स. पत्ता लगाउन दिइएका प्रश्नमा समूहमा छलफल गर्नुहोस् :

(क) x^3 का गुणनखण्डहरू के के हुन्छन् ?
(ख) x^5 का गुणनखण्डहरू के के हुन्छन् ?
(ग) x^3 र x^5 का साझा गुणनखण्डहरू के के हुन् ?
(घ) x^3 र x^5 का सबै भन्दाठुलो साझा गुणनखण्ड के हुन्छ ?
(ङ) दिइएका अभिव्यञ्जकका सबैभन्दा ठुलो साझा गुणनखण्डलाई के भनिन्छ ?

यहाँ x^3 का गुणनखण्डहरू $1, x, x^2, x^3$ हुन्छन् ।
x^3 का गुणनखण्डहरू $1, x, x^2, x^3, x^4, x^5$ हुन्छन् ।
x^3 र x^5 का साझा गुणनखण्डहरू $1, x, x^2, x^3$ हुन् ।
x^3 र x^5 का सबैभन्दा ठुलो साझा गुणनखण्ड x^3 हो ।
दिइएका अभिव्यञ्जकका सबै भन्दा ठुलो साझा गुणनखण्डलाई म.स.भनिन्छ ।
x^3 र x^5 को म. स. x^3 हुन्छ ।
खण्डीकरण विधिबाट x^3 र x^5 को म.स. निकाल्दा,
$x^3 = x \times x \times x$
$x^5 = x \times x \times x \times x \times x$
साझा गुणनखण्ड $= x \times x \times x = x^3$
$\therefore$ म.स. $= x^3$

दिइएका बीजीय अभिव्यञ्जकहरूको सबैभन्दा ठुलो साझा गुणनखण्डलाई ती अभिव्यञ्जकहरूको महत्तम समापवर्तक (Highest Common Factor) भनिन्छ । यसलाई छोटकरीमा म.स. (HCF) लेखिन्छ । दिइएका बीजीय अभिव्यञ्जकहरूका सबै साझा गुणनखण्डहरूको गुणनफल निकाली म.स. पत्ता लगाइन्छ ।

उदाहरण 1

$9x^2y^3$ र $15xy^2$ को म.स. पत्ता लगाउनुहोस् :

समाधान

यहाँ पहिलो अभिव्यञ्जक $= 9x^2y^3$
$= 3 \times 3 \times x \times x \times y \times y \times y$
दोस्रो अभिव्यञ्जक $= 15xy^2$
$= 3 \times 5 \times x \times y \times y$
$\therefore$ म.स. = साझा गुणनखण्ड $= 3 \times x \times y \times y = 3xy^2$

उदाहरण 2

$x^2 + 2xy + y^2$ र $x^2 - y^2$ को म.स. पत्ता लगाउनुहोस् :

समाधान

यहाँ पहिलो अभिव्यञ्जक $= x^2 + 2xy + y^2$

$= x^2 + xy + xy + y^2$

$= (x + y)(x + y)$

दोस्रो अभिव्यञ्जक $= x^2 - y^2$

$= (x + y)(x - y)$

∴ म.स. = साझा गुणनखण्ड $= (x + y)$

उदाहरण 3

$x^2 + 6x + 8$, $x^2 - 4$ र $x^2 + 4x + 4$ को म.स. पत्ता लगाउनुहोस् :

समाधान

यहाँ पहिलो अभिव्यञ्जक $= x^2 + 6x + 8$

$= x^2 + 4x + 2x + 8$

$= x(x + 4) + 2(x + 4)$

$= (x + 4) + (x + 2)$

दोस्रो अभिव्यञ्जक $= x^2 - 4$

$= x^2 - 2^2$

$= (x + 2) + (x - 2)$

तेस्रो अभिव्यञ्जक $= x^2 + 4x + 4$

$= x^2 + 2 \times 2 + 2^2$

$= (x + 2)^2$

$= (x + 2) + (x + 2)$

∴ म.स. = तीनओटै अभिव्यञ्जकहरूको साझा गुणनखण्ड $= (x + 2)$

अभ्यास 10.2.1

1. **महत्तम समापवर्तक (म.स) पत्ता लगाउनुहोस् :**

क) $4x^2y$ र xy^2 ख) $25x^2y^3$ र $15xy^2$ ग) a^2bc, b^2ac र c^2ab

घ) $x^2 - 4$ र $3x + 6$ ङ) $x^2 - y^2$ र $xy - y^2$ च) $p^2q - q^2p$ र $2p^2 - 2pq$

छ) $3a + b$ र $15a + 5b$ ज) $x^2 + 4x + 4$ र $x^2 - 4$ झ) $x^2 - 11x + 30$ र $x^2 - 36$

ञ) $x^2 - 9$ र $x^2 - 6x + 9$

ट) $x^2 + 16x + 60$ र $x^2 + 20x + 100$

ठ) $a^2 + 5a + 6$ र $a^2 + a - 6$

ड) $x^2 - 11x + 10$ र $x^3 - x$

ढ) $a^2 - 2ab + b^2$ र $a^4 - b^4$

ण) $x^2 - x^2y^2$ र $y^2 - y^4$

त) $x^2 - a^2$ र $x^2 - 2ax + a^2$

थ) $x^2 - y^2$ र $x^2y - y^2x$

द) $a^3 - ab^2$ र $a^2b + ab^2$

ध) $x^2 + 5x + 6$ र $x^2 + x - 6$

न) $a^2 + 2a - 3$ र $a^2 - 3a + 2$

प) $x^2 + 7x + 10$ र $x^2 - x - 6$

फ) $x^2 - 7x + 12$ र $3x^2 - 27$

ब) $a^2 - 3a + 2$, र $2a^2 - 9a + 10$

भ) $a^2 + 5a + 6$ र $a^2 - 4$

उत्तर

क) xy	ख) $5xy^2$	ग) abc	घ) $x + 2$	ङ) $x - y$
च) $p(p - q)$	छ) $3a + b$	ज) $x + 2$	झ) $x - 6$	ञ) $x - 3$
ट) $x + 10$	ठ) $a + 3$	ड) $x - 1$	ढ) $a - b$	ण) $1 - y^2$
त) $x - a$	थ) $x - y$	द) $a(a + b)$	ध) $x + 3$	न) $a - 1$
प) $x + 2$	फ) $x - 3$	ब) $a - 2$	भ) $a + 2$	

10.3 बीजीय अभिव्यञ्जकहरूको लघुत्तम समापवर्त्य (LCM of Algebraic Expressions)

क्रियाकलाप 11

कक्षा ७ मा दुई तरिकाबाट दिइएका सङ्ख्याहरूको लघुत्तम समापवर्त्य (ल.स.) पत्ता लगाउने क्रियाकलाप गरिसकिएको छ । उक्त दुई तरिकाका आधारमा दुई दुई जनाको समूहमा छलफल गरी 12 र 18 को ल. स. पत्ता लगाउनुहोस् ।

यहाँ लघुत्तम समापवर्त्य पत्ता लगाउने रूढ खण्डीकरण र भाग विधि छन् ।

12 र 18 को रूढ खण्डीकरण विधिबाट ल.स. पत्ता लगाउँदा,

$$12 = \textcircled{2} \times 2 \times \textcircled{3}$$
$$18 = \textcircled{2} \times 3 \times \textcircled{3}$$

ल.स. = साझा गुणनखण्ड × बाँकी गुणनखण्ड

$= 2 \times 3 \times 2 \times 3 = 36$

फेरि 12 र 18 को भाग विधिबाट ल.स. पत्ता लगाउँदा,

$$\begin{array}{r|l} 2 & 12,\ 18 \\ \hline 3 & 6,\ \ 9 \\ \hline & 2,\ \ 3 \end{array}$$

अतः 12 र 18 को ल.स. $= 2 \times 3 \times 2 \times 3 = 36$

क्रियाकलाप 12

x^2 र x^3 को ल.स.पत्ता लगाउन दिइएका प्रश्नमा समूहमा छलफल गर्नुहोस् :

(क) x^2 का गुणनखण्ड लेख्नुहोस् ।

(ख) x^3 का गुणनखण्ड लेख्नुहोस् ।

(ग) x^2 र x^3 का साझा गुणनखण्ड के के हुन्, लेख्नुहोस् ।

(घ) x^2 र x^3 का बाँकी गुणनखण्ड लेख्नुहोस् ।

यहाँ,

$x^2 = x \times x$

$x^3 = x \times x \times x$

साझा गुणनखण्डहरू $= x \times x = x^2$

बाँकी गुणनखण्ड $= x$

∴ ल. स. = साझा गुणनखण्डहरू × बाँकी गुणनखण्डहरू

$= x^2 \times x = x^3$

दुई वा दुईभन्दा बढी बीजीय अभिव्यञ्जकहरूको लघुत्तम समापवर्त्य (Lowest Common Multiple) भनेको ती अभिव्यजकहरूले नि:शेष भाग जाने सबैभन्दा सानो बीजीय अभिव्यञ्जक हो । यसलाई छोटकरीमा ल.स. (LCM) लेखिन्छ । दिइएका बीजीय अभिव्यञ्जकहरूका सबै साझा गुणनखण्डहरू र बाँकी गुणनखण्डहरूको गुणनफल निकाली ल.स. पत्ता लगाइन्छ ।

उदाहरण 1

$3xy^2$ र $6x^2y$ को ल.स. पत्ता लगाउनुहोस् :

समाधान

यहाँ पहिलो अभिव्यञ्जक $= 3xy^2$

$= 3 \times x \times y \times y$

दोस्रो अभिव्यञ्जक $= 6x^2y$

$= 2 \times 3 \times x \times x \times y$

साझा गुणनखण्ड $= 3 \times x \times y = 3xy$

बाँकी गुणनखण्ड $= 2 \times x \times y = 2xy$

$= (x + 2) + (x – 2)$

∴ ल.स. = साझा गुणनखण्ड × बाँकी गुणनखण्ड $= 3xy \times 2xy = 6x^2y^2$

उदाहरण 2

$3x^3 – 15x^2$ र $2x^3 – 50x$ को ल.स. पत्ता लगाउनुहोस् :

समाधान

यहाँ पहिलो अभिव्यञ्जक $= 3x^3 – 15x2$

$= 3x^2(x – 5)$

दोस्रो अभिव्यञ्जक $= 2x^3 – 50x$

$= 2x(x^2 – 25)$

$= 2x(x^2 – 52)$

$= 2x(x + 5)\ (x – 5)$

साझा गुणनखण्ड $= x(x – 5)$

बाँकी गुणनखण्ड $= 3x \times 2(x + 5) = 6x(x + 5)$

$= (x + 2) + (x – 2)$

∴ ल.स. = साझा गुणनखण्ड × बाँकी गुणनखण्ड

$= x(x – 5) \times 6x(x + 5)$

$= 6x^2(x – 5)(x + 5)$

उदाहरण 3

$x^2 + x – 20$ र $x^2 – 25$ को म.स. पत्ता लगाउनुहोस् :

समाधान

यहाँ, पहिलो अभिव्यञ्जक $= x^2 + x - 20$
$= x^2 + 5x - 4x - 20$
$= x(x + 5) - 4(x + 5)$
$= (x + 5)(x - 4)$

दोस्रो अभिव्यञ्जक $= x^2 - 25$
$= x^2 - 52$
$= (x + 5)(x - 5)$

साझा गुणनखण्ड $= (x + 5)$

बाँकी गुणनखण्ड $= (x - 4)(x - 5)$

∴ ल.स. = साझा गुणनखण्ड × बाँकी गुणनखण्ड
$= (x + 5)(x - 4)(x - 5)$

अभ्यास 10.3.1

1. **लघुत्तम समापवर्त्य (ल.स.) पत्ता लगाउनुहोस् :**

क) $2x$ र 4
ख) $3x^2y$ र $6xy^2$
ग) $5xy$ र $10y^2$
घ) $6a^2b$ र $6ab^2$
ङ) $2a$ र $2a + 4$
च) $3x^2 - 3$ र $x^2 - 1$
छ) $x + y$ र $x^2 + xy$
ज) $x^2 + 4x + 4$ र $x^2 + 2x$
झ) $5x - 20$ र $x^2 - 16$
ञ) $p^2 - pq$ र $pq - q^2$
ट) $3x^3 + 15x^2$ र $2x^3 - 50x$
ठ) $x^3 - 4x$ र $x^2 + 7x + 10$
ड) $3x^2 + 7x + 2$ र $2x^2 + 3x - 2$
ढ) $y^2 + 2y - 48$ र $y^2 - 9y + 18$
ण) $a^2 + 4ab + 4b^2$ र $a^2 - 4b^2$
त) $9x^2 - 24xy + 16y^2$ र $3x^2 - xy - 4y^2$
थ) $a^2 - 1$ र $a^2 + a - 2$
द) $x^2 - 4$ र $x^2 + 3x + 2$
ध) $x^2 + x - 6$ र $x^2 + 2x - 3$
न) $4x^2 + 12xy + 9y^2$ र $4x^2 - 12xy + 9y^2$
प) $6x^3 + 5x^2 - 6x$, र $3x^3 - 5x^2 + 2x$
फ) $x^3 - x^2 - 42x$ र $x^4 + 4x^3 - 12x^2$

उत्तर

1. क) $4x$ ख) $6x^2y^2$ ग) $10xy^2$ घ) $6a^2b^2$ ङ) $2a(a + 2)$

च) $3(x^2 - 1)$ छ) $x(x + y)$ ज) $x(x + 2)^2$ झ) $5(x^2 - 16)$ ञ) $pq(p - q)$

ट) $6x^2(x^2 - 25)$ ठ) $x(x^2 - 4)(x + 5)$ ड) $(x + 2)(3x + 1)(2x - 1)$

ढ) $(y - 6)(y - 3)(y - 8)$ ण) $(a - 2b)(a + 2b)^2$

(त) $(3x - 4y)^2(x + y)$ थ) $(a^2 - 1)(a + 2)$

(द) $(x + 1)(x^2 - 4)$ ध) $(x - 1)(x - 2)(x + 3)$

न) $(2x - 3y)^2(2x + 3y)^2$ (प) $x(2x + 3)(3x - 2)(x - 1)$

(फ) $x^2(x - 2)(x + 6)(x - 7)$

पाठ 11

बीजीय भिन्न (Algebraic Fraction)

11.0 पुनरवलोकन (Review)

दिइएका प्रश्नहरूका बारेमा समूहमा छलफल गर्नुहोस् :

(क) भिन्न भनेको के हो ?

(ख) $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}$ र $\frac{5}{12}$ का अंश (Numerator) र हर (Denominator) कति कति छन्, लेख्नुहोस् ।

(ग) बीजीय अभिव्यञ्जक भनेको के हो ? बीजीय अभिव्यञ्जकका उदाहरण लेख्नुहोस् ।

(घ) एउटा वर्गाकार खेतको क्षेत्रफल $x^2 + 2xy + y^2$ भए उक्त खेतको लम्बाइ कति रहेछ ?

11.1 बीजीय भिन्न (Algebraic Fraction)

क्रियाकलाप 1

दिइएका प्रश्नहरूका बारेमा समूहमा छलफल गर्नुहोस् :

- 3, 5, $\frac{2}{3}$, $\frac{6}{7}$ कस्ता सङ्ख्याहरू हुन् ?
- $\frac{a}{b}, \frac{x}{x+1}$ मा अंश (Numerator) र हर (Denominator) दुबैमा के प्रयोग गरिएको छ ?
- कुनै पनि भिन्नको अंश (Numerator) र हर (Denominator) दुबैमा बीजीय अभिव्यञ्जक प्रयोग गरिएको भिन्नलाई के भनिन्छ ?

यहाँ, 3, 5, $\frac{2}{3}$, $\frac{6}{7}$ सङ्ख्याहरू आनुपातिक सङ्ख्याहरू हुन् । त्यस्तै, $\frac{a}{b}, \frac{x}{x+1}$ पनि आनुपातिक हो , जसका अंश (Numerator) र हर (Denominator) दुबैमा बीजीय अभिव्यञ्जक प्रयोग गरिएको छ ।

अंश (Numerator) र हर (Denominator) दुबैमा बीजीय अभिव्यञ्जक प्रयोग गरिएका भिन्नलाई बीजीय भिन्न (Algebraic Fraction) भनिन्छ ।

उदाहरण 1

सरल गर्नुहोस् :

(क) $\frac{x^3 - x}{x^2 + x}$

समाधान

यहाँ $\frac{x^3 - x}{x^2 + x} = \frac{x(x^2 - 1)}{x(x + 1)}$

$= \frac{(x + 1)(x + 1)}{(x + 1)}$ $[a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)]$

$= (x - 1)$ (साझा गुणन खण्ड $(x + 1)$ लाई हटाउँदा)

(ख) $\frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 2x}$

समाधान

यहाँ $\frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 2x}$

$= \frac{(x-2)(x-3)}{x(x-2)}$

$= \frac{(x-3)}{x}$

$x^2 - 5x + 6$
$= x^2 - 3x - 2x + 6$
$= x(x - 3) - 2(x - 3)$
$= (x - 3)(x - 2)$

अभ्यास 11.1

1. **सरल गर्नुहोस् :**

क) $\frac{3a^2}{4a^3}$ ख) $\frac{5x^2y}{10xy^2}$ ग) $\frac{a^2+2ab+b^2}{a^2-b^2}$

घ) $\frac{5a^3-45a}{4a^2-12a}$ ङ) $\frac{(x-3)^3}{2x-6}$ च) $\frac{x^2+6x+9}{x^2-9}$

छ) $\frac{a^2+6x+8}{a^2-16}$ ज) $\frac{x^2+x-12}{x^2-x-6}$ झ) $\frac{(2x+3)^2}{4x^2-9}$

ञ) $\frac{x^2+2x-15}{x^2+9x+20}$ ट) $\frac{x^2+5x+6}{(x+3)^2}$ ठ) $\frac{x^2-9x+18}{x^2-7x+6}$

ड) $\frac{x^2-1}{x^2-6x+5}$ ढ) $\frac{3xyz}{3x^2-12x}$ ण) $\frac{x^2-4x+4}{x-2}$

उत्तर

1. क) $\frac{3}{4a}$ ख) $\frac{x}{2y}$ ग) $\frac{a+b}{a-b}$ घ) $\frac{5(a+3)}{4}$ ङ) $\frac{(x-3)^2}{2}$

च) $\frac{x+3}{x-3}$ छ) $\frac{a+2}{a-4}$ ज) $\frac{x+4}{x+2}$ (झ) $\frac{2x+3}{2x-3}$ (ञ) $\frac{x-3}{x+4}$

ट) $\frac{x+2}{x+3}$ ठ) $\frac{x-3}{x-1}$ ड) $\frac{x+1}{x-5}$ ढ) $\frac{yz}{x-4}$ ण) x-2

11.2 समान हर भएका बीजीय भिन्नको जोड र घटाउ (Addition and subtraction of Algebraic Fraction having same Denominator)

क्रियाकलाप 2

दिइएका बिजीय भिन्नहरूको सरल गर्नुहोस् । सरल गर्दा अपनाइने प्रक्रियाका बारेमा साथीसँग छलफल गर्नुहोस् ।

(क) $\frac{2}{3}+\frac{4}{3}$ (ख) $\frac{a}{x}+\frac{b}{x}$ (ग) $\frac{x}{x-y}-\frac{y}{x-y}$

माथि उल्लिखित भिन्नहरूलाई सरल गर्दा भिन्नको हर समान वा असमान के छ त्यो हेरी सरल गर्नुपर्छ । यदि हर समान भएमा अंशहरूको आवश्यक क्रिया मात्र गरेर एउटा हर लेखे पुग्छ भने असमान हर भएमा तिनीहरूको हर समान बनाउनुपर्छ ।

जस्तै :

(क) $\frac{2}{3}+\frac{4}{3}$ यी समान हर भएका भिन्न हुन् । त्यसैले,

$\frac{2}{3}+\frac{4}{3}$ [एउटा मात्र हर राखेर अंशमा जोड क्रिया गरियो ।]

$=\frac{2+4}{3}$

$=\frac{6}{3}=2$

(ख) $\frac{a}{x}+\frac{b}{x}$

यहाँ $\frac{a}{x}+\frac{b}{x}$ यी समान हर भएका भिन्न हुन् । त्यसैले,

$=\frac{a+b}{x}$ [एउटा मात्र हर राखेर अंशमा जोड क्रिया गरियो ।]

(ग) $\frac{x}{x-y}-\frac{y}{x-y}$

$$= \frac{x}{x-y} - \frac{y}{x-y}$$ [एउटा मात्र हर राखेर अंशमा घटाउ क्रिया गरियो ।]

$$= \frac{x-y}{x-y} = 1$$

यदि बिजीय भिन्नको हर समान छ भने अंशहरूको मात्र जोड वा घटाउ गरिन्छ । हरलाई जस्ताको त्यस्तै राख्ने सरल गरी न्यूनतम पदमा लैजानु पर्दछ ।

उदाहरण 1

सरल गर्नुहोस् :

(क) $\frac{x}{a+b} - \frac{y}{a+b}$ (ख) $\frac{3a}{a+3} + \frac{9}{a+3}$

समाधान

(क) यहाँ, $\frac{x}{a+b} - \frac{y}{a+b}$

$$= \frac{x-y}{a+b}$$

(ख) $\frac{3a}{a+3} + \frac{9}{a+3}$

$$= \frac{3a+9}{a+3}$$

$$= \frac{3(a+3)}{a+3}$$

$$= 3$$

उदाहरण 2

सरल गर्नुहोस् :

(क) $\frac{x^2}{x+y} - \frac{y^2}{x+y}$ (ख) $\frac{a^2}{a-3} + \frac{6a+9}{a-3}$

समाधान

(क) यहाँ, $\frac{x^2}{x+y} - \frac{y^2}{x+y}$

$$= \frac{x^2 - y^2}{x + y}$$

$$= \frac{(x + y)(x - y)}{x + y}$$

$$= (x - y)$$

(ख) $\frac{a^2}{a - 3} + \frac{6a + 9}{a - 3}$

$$= \frac{(a^2 + 6a + 9)}{a - 3}$$

$$= \frac{a^2 + 2 \times a \times 3 + 3^2}{(a - 3)}$$

$$= \frac{(a + 3)^2}{(a - 3)}$$

अभ्यास 11.2

1. सरल गर्नुहोस् :

क) $\frac{2a}{y} + \frac{3b}{y}$ ख) $\frac{5p}{r^2} + \frac{7q}{r^2}$ ग) $\frac{5a}{6b} - \frac{a}{6b}$

घ) $\frac{3}{x+2} - \frac{2}{x+2}$ ङ) $\frac{x+1}{2} + \frac{x+2}{2}$ च) $\frac{x+y}{a+1} - \frac{y}{a+1}$

छ) $\frac{6}{y-3} - \frac{3y}{y-3}$ ज) $\frac{3x}{x+1} + \frac{3}{x+1}$ झ) $\frac{mn}{m+n} - \frac{mn}{m+n}$

2. सरल गर्नुहोस् :

क) $\frac{(x+2)}{(x+3)} + \frac{(x-2)}{(x+3)}$ ख) $\frac{3x+1}{x^2+2} - \frac{x+1}{x^2+2}$ ग) $\frac{y-15}{y^2-9} + \frac{18}{y^2-9}$

घ) $\frac{ax^2+bx}{x+a}+\frac{c}{x+a}$ ङ) $\frac{x^2-4x}{x^2-4}-\frac{4}{x^2-4}$ च) $\frac{y^2+3y}{y+3}+\frac{5y+15}{y+3}$

छ) $\frac{5p^2}{4-p}-\frac{35p-60}{4-p}$ ज) $\frac{p^4}{(p+3)^2}+\frac{81-18p^2}{(p+3)^2}$

झ) $\frac{3x^2}{x+y}+\frac{6xy+3y^2}{x+y}$ ञ) $\frac{a^2+b^2}{(a-b)^2}-\frac{2ab}{(a-b)^2}$

ट) $\frac{m^2}{m^2+5m+6}+\frac{2m}{m^2+5m+6}$ ठ) $\frac{x^2}{x^2-4x+3}-\frac{3x}{x^2-4x+3}$

उत्तर

1. क) $\frac{2a+3b}{y}$ ख) $\frac{5p+7q}{r^2}$ ग) $\frac{2a}{3b}$ घ) $\frac{1}{x+2}$ ङ) $\frac{2x+3}{2}$

च) $\frac{x}{a+1}$ छ) $\frac{6-3y}{y-3}$ ज) 3 (झ) 0

2. क) $\frac{2x}{x+3}$ ख) $\frac{2x}{x^2+2}$ ग) $\frac{1}{y-3}$ घ) $\frac{ax^2+bx+c}{x+a}$

ङ) $\frac{x-2}{x+2}$ च) $y+5$ छ) $15-5p$ ज) $(p-3)^2$

(झ) $3(x+y)$ (ञ) 1 ट) $\frac{m}{m+3}$ ठ) $\frac{x}{x-1}$

11.3 असमान हर भएका बीजीय भिन्नको जोड र घटाउ (Addition and subtraction of Algebraic Fraction having Different Denominator)

क्रियाकलाप 3

तल दिइएका बिजीय भिन्नहरूको सरल गर्नुहोस्। सरल गर्दा अप्नाइने प्रक्रियाका बारेमा साथीसँग छलफल गर्नुहोस्।

(क) $\frac{2}{3}+\frac{4}{5}$ (ख) $\frac{a}{x}+\frac{b}{y}$ (ग) $\frac{x}{x-y}-\frac{y}{x+y}$ (घ) $\frac{1}{x-y}-\frac{x}{x^2-y^2}$

माथि उल्लिखित भिन्नहरूलाई सरल गर्दा भिन्नको हर समान वा असमान के छ त्यो हेरि सरल गर्नुपर्छ । यदि हर समान भएमा अंशहरूको आवश्यक क्रिया मात्र गरेर एउटा हर लेखे पुग्छ भने असमान हर भएमा पहिला तिनीहरूको हर समान गर्नुपर्छ ।

जस्तै:

(क) $\frac{2}{3}+\frac{4}{5}$ मा हर असमान छन् । अब समान हर भएका भिन्न बनाउनका लागि,

$=\frac{2\times 5}{3\times 5}+\frac{4\times 3}{4\times 3}$ [एउटा भिन्नको हरले अर्को भिन्नको हर र अंशलाई गुणन गरेको]

$=\frac{10}{15}+\frac{12}{15}$ अब यी समान हर भएका भिन्न भए । त्यसैले,

$=\frac{10+12}{15}$ [एउटा मात्र हर राखेर अंशमा जोड क्रिया गरियो ।]

$=\frac{22}{15}$

(ख) $\frac{a}{x}+\frac{b}{y}$

यहाँ, $\frac{a}{x}+\frac{b}{y}$ मा हर असमान छन् । अब समान हर भएका भिन्न बनाउनका लागि,

$=\frac{a\times y}{x\times y}+\frac{b\times x}{y\times x}$ [माथिको जस्तै गरी एउटा भिन्नको हरले अर्को भिन्नको हर र अंशलाई गुणन गरेको]

$=\frac{ay}{xy}+\frac{bx}{xy}$ अब यी समान हर भएका भिन्न भए । त्यसैले,

$=\frac{ay+bx}{xy}$ $=\frac{22}{15}$ [एउटा मात्र हर राखेर अंशमा जोड क्रिया गरियो ।]

(ग) $\frac{x}{x-y}-\frac{y}{x+y}$ मा हर असमान छन् । अब समान हर भएका भिन्न बनाउनका लागि,

$=\frac{x(x+y)}{(x+y)\,(x-y)}-\frac{y(x-y)}{(x+y)\,(x-y)}$ [एउटा भिन्नको हरले अर्को भिन्नको हर र अंशलाई गुणन गरेको]

$$= \frac{x(x + y) - y(x - y)}{(x + y)(x - y)}$$

$$= \frac{x^2 + xy - xy + y^2}{(x + y)(x - y)}$$

$$= \frac{x^2 + y^2}{x^2 - y^2}$$

(घ) $\frac{1}{x - y} - \frac{x}{x^2 - y^2}$ [मा हर असमान छन् । अब समान हर भएको भिन्न बनाउनका लागि,]

$$= \frac{1\,(x + y)}{(x - y)(x + y)} - \frac{x}{(x - y)(x + y)}$$

$$= \frac{x + y - x}{(x - y)(x + y)}$$

$$= \frac{y}{(x - y)(x + y)}$$

	हर बराबर बनाउन
पहिलो भिन्नको हर = $(x - y)$	$\times (x + y)$
दोस्रो भिन्नको हर = $(x - y)(x + y)$	$\times 1$

यसलाई यसरी पनि गर्न सकिन्छ ।

पहिलो भिन्नको हर = (x - y)

दोस्रो भिन्नको हर = (x - y)(x + y)

ल.स. = (x - y)(x + y)

अब यसको सरल गर्दा

$$= \frac{1}{x-y} - \frac{x}{(x-y)(x+y)}$$

$$= \frac{(x + y) - x}{(x-y)(x+y)}$$

[भिन्नको हरमा ल.स. राखी भिन्नको हरले ल.स. लाई भाग गरेर सोही भिन्नको अंशलाई गुणन गरेको ।]

$$= \frac{(x + y) - x}{(x-y)(x+y)}$$

$$= \frac{y}{(x-y)(x+y)}$$

बीजीय भिन्नको सरल गर्दा,

(क) बीजीय भिन्नको हर असमान भएमा सबैभन्दा पहिला हरहरू समान बनाई सरल गर्नुपर्ने रहेछ ।

वा

(ख) बीजीय भिन्नका हरहरूको लघुत्तम समापवर्त्य (ल.स.) निकालेर भिन्नको हरमा ल.स. राखी भिन्नको हरले ल.स. लाई भाग गरी भागफलले सोही भिन्नको अंशलाई गुणन गरी सरल गर्नुपर्ने रहेछ । अन्त्यमा भिन्नलाई न्यूनतम पदमा लैजानु पर्दछ ।

उदाहरण 1

सरल गर्नुहोस् :

(क) $\frac{x}{3} + \frac{x}{2}$ (ख) $\frac{x+3}{x-2} + \frac{x+2}{x-3}$

समाधान

यहाँ क) $\frac{x}{3} + \frac{x}{2}$

$= \frac{x\times2}{3\times2} + \frac{x\times3}{2\times3}$

[एउटा भिन्नको हरले अर्को भिन्नको हर र अंशलाई गुणन गरेको]

$= \frac{2x+3x}{6}$

$= \frac{5x}{6}$

बैकल्पिक तरिका

$\frac{x}{3} + \frac{x}{2}$

3 र 2 को ल.स. = 3 × 2 = 6

$= \frac{2x+3x}{6}$

$= \frac{5x}{6}$

(ख) $\frac{x+3}{x-2} - \frac{x+2}{x-3}$

$= \frac{(x+3)(x-3)}{(x-2)(x-3)} - \frac{(x+2)(x-2)}{(x-3)(x-2)}$

$= \frac{(x^2-9)}{(x-2)(x-3)} - \frac{x^2-4}{(x-3)(x-2)}$

बैकल्पिक तरिका

$\frac{x+3}{x-2} - \frac{x+2}{x-3}$

$(x-2)$ र $(x-3)$ को ल.स.

$= (x-2)(x-3)$

$$= \frac{(x^2-9)-(x^2-4)}{(x-3)(x-2)}$$

$$= \frac{x^2-9-x^2+4}{(x-3)(x-2)}$$

$$= \frac{-5}{(x-3)(x-2)}$$

$$= \frac{(x+3)(x-3)-(x+2)(x-2)}{(x-2)(x-3)}$$

$$= \frac{(x^2-9)-(x^2-4)}{(x-3)(x-2)}$$

$$= \frac{x^2-9-x^2+4}{(x-3)(x-2)}$$

$$= \frac{-5}{(x-3)(x-2)}$$

उदाहरण 2

सरल गर्नुहोस् :

(क) $\frac{x}{x^2+3x+2} - \frac{2}{x^2-1}$

समाधान

यहाँ $\frac{x}{x^2+3x+2} - \frac{2}{x^2-1}$

पहिलो अभिव्यञ्जक

$x^2 + 3x + 2$

$= x^2 + 2x + x + 2$

$= x(x + 2) + 1(x + 2)$

$= (x + 2)(x + 1)$

दोस्रो अभिव्यञ्जक

$x^2 - 1 = (x + 1)(x - 1)$

$$= \frac{x}{(x+1)(x+2)} - \frac{2}{(x+1)(x-1)}$$

$$= \frac{x(x-1)}{(x+1)(x+2)(x-1)} - \frac{2(x+2)}{(x+1)(x-1)(x+2)}$$

$$= \frac{x(x-1)-2(x+2)}{(x+1)(x+2)(x-1)}$$

$$= \frac{x^2-x-2x-4}{(x+1)(x+2)(x-1)}$$

$$= \frac{x^2-3x-4}{(x+1)(x+2)(x-1)}$$

$$= \frac{(x-4)(x+1)}{(x+1)(x+2)(x-1)}$$

$$= \frac{(x-4)}{(x+2)(x-1)}$$

		हर बराबर बनाउन
पहिलो भिन्नको हर = $(x + 2)(x + 1)$		$\times (x - 1)$
दोस्रो भिन्नको हर = $(x - 1)(x + 1)$		$\times (x + 2)$

वैकल्पिक तरिका

$$= \frac{x}{(x+1)(x+2)} - \frac{2}{(x+1)(x-1)}$$

$(x + 1)(x + 2)$ र $(x + 1)(x - 1)$ को ल.स.

$= (x + 1)(x - 1)(x + 2)$

$$= \frac{x(x-1)-2(x+2)}{(x+1)(x+2)(x-1)}$$

$$= \frac{x^2-3x-4}{(x+1)(x+2)(x-1)}$$

$$= \frac{(x-4)(x+1)}{(x+1)(x+2)(x-1)}$$

$$= \frac{(x-4)}{(x+2)(x-1)}$$

$x^2 - 3x - 4$
$= x^2 - 4x + x - 4$
$= x(x - 4) + 1(x - 4)$
$= (x - 4)(x + 1)$

अभ्यास 11.3

1. **सरल गर्नुहोस् :**

क) $\frac{a}{3} + \frac{a}{4}$ ख) $\frac{2}{x} + \frac{3}{2x}$ ग) $\frac{1}{2a} - \frac{1}{3a}$

घ) $\frac{3x}{2y} - \frac{2x}{3y}$ ङ) $\frac{2}{ab} + \frac{3}{2bc}$ च) $\frac{4}{ax} - \frac{3}{bx}$

छ) $4x + \frac{3x}{7}$ ज) $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3}$ झ) $\frac{2}{a} - \frac{3}{ab}$

ञ) $\frac{3}{7} - \frac{5}{3y}$ ट) $\frac{x^2}{y} - 4y$ ठ) $\frac{x}{2-x} - \frac{2-x}{x}$

2. सरल गर्नुहोस् :

क) $\frac{2}{x-y}+\frac{3}{x+y}$ खा) $\frac{1}{a-b}-\frac{1}{a+b}$ ग) $\frac{2}{p-2q}+\frac{1}{p+2q}$

घ) $\frac{x}{2(x-2)}-\frac{1}{(x-2)}$ ङ) $\frac{a}{a+b}+\frac{b}{a-b}$ च) $\frac{3}{x-a}+\frac{4}{x+a}$

छ) $\frac{x}{x^2-1}+\frac{1}{x-1}$ ज) $\frac{x+3}{x-5}-\frac{x+5}{x-3}$ झ) $\frac{x+7}{x-7}-\frac{x}{7-x}$

ञ) $\frac{2x+1}{6}+2x$ ट) $\frac{x}{2(x+y)}-\frac{2}{3(x+y)}$ ठ) $\frac{1}{x+6}-\frac{x}{x+9}$

ड) $\frac{x+2}{x^2+x}-\frac{3}{x^2-x-2}$ ढ) $\frac{1}{x-3}+\frac{3x-5}{x^2-5x+6}$

ण) $\frac{2x-1}{x^2+4x}-\frac{x-2}{x^2+2x-8}$ त) $\frac{2a}{a-1}-\frac{a^2+3}{a^2-1}$

थ) $\frac{a^2+b^2}{a^2-b^2}-\frac{a-b}{a+b}$ द) $\frac{a}{a^2+3a+2}-\frac{2}{a^2-1}$

उत्तर

1. क) $\frac{7a}{12}$ ख) $\frac{7}{2x}$ ग) $\frac{1}{6a}$ घ) $\frac{5x}{6y}$

ङ) $\frac{4c+3a}{2abc}$ च) $\frac{4b-3a}{abx}$ छ) $\frac{31x}{7}$ ज) $\frac{3x^2+4y^2}{12}$

(झ) $\frac{2b-3}{ab}$ (ञ) $\frac{9y-35}{21y}$ ट) $\frac{x^2-4y^2}{y}$ ठ) $\frac{4x-4}{2x-x^2}$

2. क) $\frac{5x-y}{(x^2-y^2)}$ ख) $\frac{2b}{a^2-b^2}$ ग) $\frac{3p+2q}{p^2-4q^2}$ घ) $\frac{1}{2}$

ङ) $\frac{a^2+b^2}{a^2-b^2}$	च) $\frac{7x-a}{x^2-a^2}$	छ) $\frac{2x+1}{x^2-1}$	ज) $\frac{16}{(x-5)(x-3)}$
(झ) $\frac{2x+7}{x-7}$	(ञ) $\frac{14x+1}{6}$	ट) $\frac{3x-4}{6(x+y)}$	ठ) $\frac{9-5x-x^2}{(x+9)(x+6)}$
ड) $\frac{x+4}{x^2-2x}$	ढ) $\frac{4x-3}{(x-3)(x-2)}$	ण) $\frac{x-1}{x(x+4)}$	त) $\frac{a+3}{a-1}$
(थ) $\frac{2ab}{a^2-b^2}$	(द) $\frac{a-4}{(a+2)(a-1)}$		

11.4 बीजीय भिन्नको गुणन र भाग (Multiplication and Division of Algebraic Fraction)

क्रियाकलाप 5

दिइएका प्रश्नहरू समूहमा छलफल गरी समाधान गर्नुहोस् :

(क) $\frac{3}{4}$ लाई $\frac{2}{3}$ ले गुणन गर्दा कति हुन्छ ?

(ख) $\frac{a^2-b^2}{a^2+ab}$ लाई $\frac{a^2}{ab-b^2}$ ले गुणन गर्दा कति हुन्छ ?

(ग) $\frac{4}{5}$ लाई $\frac{2}{3}$ ले भाग गर्दा हुन्छ ?

(घ) $\frac{a^2-b^2}{b^2}$ लाई $\frac{a^2+ab}{ab}$ ले भाग गर्दा कति हुन्छ ?

यहाँ, (क) $\frac{3}{4}$ लाई $\frac{2}{3}$ ले गुणन गर्दा

$$\frac{3}{4}\times\frac{2}{3}=\frac{3\times2}{4\times3}=\frac{1}{2}$$

(ख) $\dfrac{a^2-b^2}{a^2+ab}$ लाई $\dfrac{a^2}{ab-b^2}$ ले गुणन गर्दा,

$$= \frac{a^2-b^2}{a^2+ab} \times \frac{a^2}{ab-b^2}$$

$$= \frac{(a+b)(a-b)\times a^2}{a(a+b)\times b(a-b)}$$

$$= \frac{a}{b}$$

भिन्नहरू बिच गुणन गर्दा अंशसँग अंश र हरसँग हरले गुणन गर्नुपर्ने रहेछ ।

(ग) $\dfrac{4}{5}$ लाई $\dfrac{2}{3}$ ले भाग गर्दा

$$= \frac{4}{5} \div \frac{2}{3}$$

कुनै पनि सङ्ख्यालाई 1 ले भाग गर्दा भागफल र भाज्य एउटै हुन्छ ।

$$= \frac{4}{5} \times \frac{3}{2} \div \frac{2}{3} \times \frac{3}{2}$$ (भाजकलाई 1 बनाइएको)

$$= \frac{4}{5} \times \frac{3}{2} \div 1$$

$$= \frac{4}{5} \times \frac{3}{2}$$

$$= \frac{6}{5}$$

(घ) $\dfrac{a^2-b^2}{b^2}$ लाई $\dfrac{a^2+ab}{ab}$ ले भाग गर्दा

$$\frac{a^2-b^2}{b^2} \div \frac{a^2+ab}{ab}$$

$$= \frac{(a^2-b^2)}{b^2} \times \frac{ab}{a^2+ab} \div \frac{a^2+ab}{ab} \times \frac{ab}{a^2+ab}$$ (भाजकलाई 1 बनाइएको)

$$= \frac{(a+b)(a-b)}{b^2} \times \frac{ab}{a(a+b)} \div 1$$

$$= \frac{(a+b)(a-b)}{b^2} \times \frac{ab}{a(a+b)}$$ माथिको जस्तै यसबाट के निष्कर्ष निकाल्नुहुन्छ ?

$$= \frac{(a-b)}{b}$$

कुनै भिन्नलाई अर्को भिन्नले भाग गर्दा र भाजक भिन्नको ब्युतक्रमले उक्त भिन्नलाई गुणन गर्दा एउटै नतिजा आउने रहेछ । अर्थात कुनै भिन्नलाई अर्को भिन्नले भाग गर्दा भाग चिह्नलाई गुणन चिह्नमा परिवर्तन गरेर भाजक भिन्नको हरलाई अंश र अंशलाई हर बनाइ सरल गर्नु पर्ने रहेछ ।

उदाहरण 1

सरल गर्नुहोस् :

(क) $\frac{4}{x^2+3x+2} \div \frac{2}{x^2-1}$

समाधान

यहाँ, $\frac{4}{x^2+3x+2} \div \frac{2}{x^2-1}$

$$= \frac{4}{x^2+3x+2} \times \frac{x^2-1}{2}$$

$$= \frac{4}{(x+2)(x+1)} \times \frac{(x+1)(x-1)}{2}$$

$$= \frac{2}{(x+2)} \times \frac{(x-1)}{1}$$

$$= \frac{2(x-1)}{(x+2)}$$

पहिलो हर

$x^2 + 3x + 2$

$= x^2 + 2x + x + 2$

$= x(x + 2) + 1(x + 2)$

$= (x + 2)(x + 1)$

दोस्रो हर

$x^2 - 1 = (x + 1)(x - 1)$

उदाहरण 2

सरल गर्नुहोस् :

(क) $\frac{x^2-6x+9}{x^2+3x+2} \div \frac{x^2-5x+6}{x^2-x-2}$

समाधान

यहाँ, $\frac{x^2-6x+9}{x^2+3x+2} \div \frac{x^2-5x+6}{x^2-x-2}$

$$= \frac{x^2-6x+9}{x^2+3x+2} \times \frac{x^2-x-2}{x^2-5x+6}$$

$$= \frac{(x-3)(x-3)}{(x+1)(x+2)} \times \frac{(x-2)(x+1)}{(x-2)(x-3)}$$

$$= \frac{(x-3)}{(x+2)}$$

$x^2 - 6x + 9$
$= x^2 - 2 \times x \times 3 + 3^2$
$= (x - 3)(x - 3)$

$x^2 - 5x + 6$
$= x^2 - 3x - 2x + 6$
$= x(x - 3) - 2(x - 3)$
$= (x - 3)(x - 2)$

$x^2 - x - 2$
$= x^2 - 2x + x - 2$
$= x(x - 2) + 1(x - 2)$
$= (x - 2)(x + 1)$

अभ्यास 11.4

1. **सरल गर्नुहोस् :**

क) $\frac{a^2}{b} \times \frac{2}{b}$ ख) $\frac{3x^2}{4y^2} \times \frac{4y}{3x}$ ग) $\frac{7a^2b}{8c} \times \frac{4c^2}{14ab^2}$

घ) $\frac{x-y}{x+y} \times \frac{x}{y}$ ङ) $\frac{a-3}{3} \times \frac{6}{a-3}$ च) $\frac{x-3}{x+2} \times \frac{(x+2)^2}{(x-3)^2}$

2. **सरल गर्नुहोस् :**

क) $\frac{a^2}{b^2} \div \frac{a}{b}$ ख) $\frac{3xy}{4ab} \div \frac{6y}{5b}$ ग) $\frac{x}{7} \div \frac{x^2}{14}$

घ) $\frac{6a^2b}{7x^2y} \div \frac{6ab^2}{7y^2}$ ङ) $\frac{a^2-b^2}{a} \div \frac{a-b}{b}$ च) $\frac{x^2-1}{y^2} \div \frac{x-1}{y}$

3. **सरल गर्नुहोस् :**

क) $\frac{x^2-y^2}{x+y} \times \frac{x+y}{(x-y)^2}$ ख) $\frac{x^2+2xy+y^2}{x^2-y^2} \times \frac{x-y}{x+y}$

ग) $\frac{x^2-4x+4}{3y-xy} \times \frac{4x-12}{x-2}$

घ) $\frac{a^2-b^2}{a^2+2a+ab+2b} \times \frac{a+2}{a+3}$

ङ) $\frac{y^2+10y+24}{y^2+2y-8} \times \frac{y-3}{y+6}$

च) $\frac{x^2-3x-10}{x^2-5x+6} \times \frac{bx-3b}{cx-5c}$

छ) $\frac{x^2-11+30}{x^2-7x+10} \times \frac{5x-10}{x^2-8x+12}$

ज) $\frac{x^2-9}{x^2+4x} \times \frac{x^2+2x-8}{x^2+x-6}$

झ) $\frac{x^2-5x+6}{x^2-6x+9} \times \frac{x^2-2x-3}{x^2-3x+2}$

4. **सरल गर्नुहोस् :**

क) $\frac{x^2-y^2}{x+y} \div \frac{x-y}{x+y}$

ख) $\frac{x^2-5x+6}{x^2-9} \div \frac{x-3}{x+3}$

ग) $\frac{x^2+12x+36}{x^2-16} \div \frac{3x+18}{2x^2+8x}$

घ) $\frac{3x^2-4x-7}{3x^2-7x} \div \frac{x^2-1}{x-4}$

ङ) $\frac{x^2+2x-15}{x-2} \div \frac{3(x^2+4x-5)}{x^2-3x+2}$

च) $\frac{x^2+12x+27}{x^2+x-6} \div \frac{x^2+4x-45}{9(x^2-4x-5)}$

छ) $\frac{xy-x+2y-2}{3y+2x+xy+6} \div \frac{xy-x+5y-5}{x^2+8x+15}$

ज) $\frac{y^2+4y-12}{y^2-5y+6} \div \frac{y^2+3y-18}{y^2-9}$

झ) $\frac{x^2-8x+15}{x^2-14x+45} \div \frac{x^2-2x-15}{x^2-8x-9}$

ञ) $\frac{a^2+3a+2}{a^2-4a-12} \div \frac{a^2-a-6}{a^2-9a+18}$

5. **सरल गर्नुहोस् :**

क) $\frac{2x}{5y} \times \left(\frac{2y}{5} \div \frac{y}{3}\right)$

ख) $\left(\frac{x}{(x-1)} - \frac{1}{(x+1)}\right) \div \frac{x-1}{x^2-1}$

ग) $\left(\frac{3x}{(x-1)} \times \frac{1}{(x+1)}\right) \div \frac{3}{x^2-1}$

घ) $\frac{x-4}{x+4} \times \frac{x-3}{x+3} \div \frac{x^2-7x+12}{x^2+7x+12}$

ङ) $\left(\frac{a+b}{a-b} - \frac{a-b}{a+b}\right) \times \frac{a^2-b^2}{4ab}$

परियोजना कार्य

चौडाइ (x - 2) एकाइ र क्षेत्रफल (x^2 + 3x - 10) वर्ग एकाइ भएको एउटा आयत छ । उही चौडाइ भएको अर्को आयतको क्षेत्रफल (x^2 + x - 6) वर्ग एकाइ छ ।

(क) दुवै आयतको लम्बाइ कति कति हुने रहेछ, पत्ता लगाउनुहोस् ।

(ख) दुईओटा आयतलाई चौडाइहरूसँगै मिलाएर राख्ने हो भने जम्मा लम्बाइ कति हुन्छ ? चार्टपेपरमा चित्र बनाई कक्षाकोठामा प्रस्तुत गर्नुहोस् ।

उत्तर

1. क) $\frac{2a^2}{b^2}$ ख) $\frac{x}{y}$ ग) $\frac{ac}{4b}$ घ) $\frac{x(x-y)}{y(x+y)}$ ङ) 2 च) $\frac{x+2}{x-3}$

2. क) $\frac{a}{b}$ ख) $\frac{5x}{8a}$ ग) $\frac{2}{x}$ घ) $\frac{ay}{bx^2}$ ङ) $\frac{b(a+b)}{a}$ च) $\frac{x+1}{y}$

3. क) $\frac{x+y}{x-y}$ ख) 1 ग) $\frac{-4(x-2)}{y}$ घ) $\frac{a-b}{a+3}$ ङ) $\frac{y-3}{y-2}$
   च) $\frac{b(x+2)}{c(x-2)}$ छ) $\frac{5}{x-2}$ ज) $\frac{x-3}{x}$ (झ) $\frac{x+1}{x-1}$

4. क) x+y ख) $\frac{x-2}{x-3}$ ग) $\frac{2x(x+6)}{3(x-4)}$ घ) $\frac{x-4}{x(x-1)}$ ङ) $\frac{x-3}{3}$
   च) $\frac{9(x+1)}{x-2}$ छ) $\frac{x+2}{y+2}$ ज) $\frac{y+3}{y-3}$ (झ) $\frac{(x-3)(x+1)}{(x-5)(x+3)}$ (ञ) $\frac{a+1}{a+2}$

5. क) $\frac{12x}{25y}$ ख) $\frac{x^2+1}{x-1}$ ग) x घ) 1 ङ) 1

पाठ 12

समीकरण र ग्राफ (Equation and Graph)

12.0 पुनरवलोकन (Review)

समूहमा छलफल गरी तल दिइएका प्रश्नको समाधान गर्नुहोस् :

सन्देशले आफ्नो बगैँचाबाट x ओटा सुन्तला र y ओटा अम्बा टिपेर ल्याएछन् । यदि उनले जम्मा 12 ओटा फलफूल टिपेर ल्याएका रहेछन् भने,

(क) उक्त गणितीय वाक्यलाई समीकरणमा लेख्नुहोस् ।

(ख) सन्देशले कति कतिओटा सुन्तला र अम्बा ल्याउन सक्छ ? सम्भावित उत्तरलाई तालिकामा देखाउनुहोस् ।

(ग) चल राशिका मानलाई ग्राफमा देखाउनुहोस् ।

12.1 दुई चलयुक्त युगपतरेखीय समीकरण (Simultaneous equations with two variables)

क्रियाकलाप 1

निर्मलाले 6 ओटा आँप किनेर ल्याइन् ।

(क) अस्मि र अनिषा दुई छोरीलाई आपसमा बाँड्ने हो भने उनीहरूले कति कति पाउलान् ?

(ख) यदि निर्मलाले अस्मिलाई अनिषालाई भन्दा 2 ओटा आँप बढी दिएकी रहिछन् भने निर्मलाले छोरीहरूलाई कति कतिओटा आँप दिएकी रहिछन् ? साथीसँग छलफल गरी पत्ता लगाउनुहोस् ।

यहाँ अस्मिले पाउने आँपको सङ्ख्या $= x$ र अनिषाले पाउने आँपको सङ्ख्या $= y$ मानौँ

अब तालिकामा प्रस्तुत गर्दा,

अस्मि (x)	5	4	3	2	1
अनिषा (y)	1	2	3	4	5
जम्मा आँप	6	6	6	6	6

माथिको तालिकामा अस्मि र अनिषाले पाउने जम्मा आँप सबै अवस्थामा 6 छ । तसर्थ $x + y = 6$ ....(i) हुन्छ ।

फेरि, यदि अस्मिलाई अनिषाको भन्दा 2 ओटा आँप बढी दिइएको छ भने, दुबैले कति कतिओटा आँप प्राप्त गरे होलान् ? यसलाई तालिकामा निम्नानुसार प्रस्तुत गर्न सकिन्छ :

अनिषा (y)	0	1	2	3	4
अस्मि (x)	2	3	4	5	6
जम्मा आँप	2	4	6	8	10

माथिको तालिकामा अनिषालाई दिइएको भन्दा अस्मिलाई दिइएको आँपको सङ्ख्या दुईओटा बढी छ, तसर्थ

$x = 2 + y$

or, $x - y = 2$ ....(ii) हुन्छ ।

माथिको तालिकाबाट,

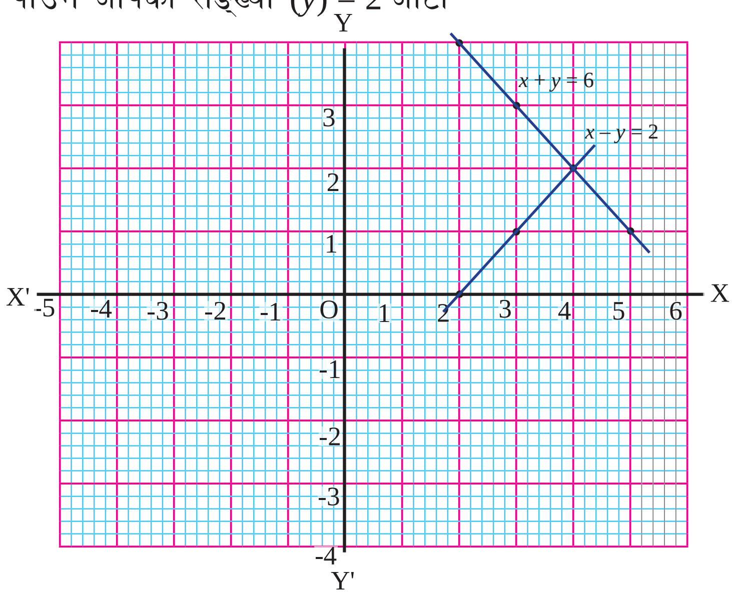
निर्मलाले आफूसँग भएको 6 ओटा आँप अनिषालाई भन्दा अस्मिलाई 2 ओटा बढी दिने हो भने अनिषालाई 2 ओटा र अस्मिलाई 4 ओटा दिन मिल्छ ।

माथिका दुई समीकरणलाई ग्राफमा भर्दा,

$x + y = 6$ र $x - y = 2$ समीकरणहरू बिन्दु (4, 2) मा प्रतिच्छेदित भएका छन् । तसर्थ $x = 4$ र $y = 2$ हुन्छ ।

अत: अस्मिले पाउने आँपका सङ्ख्या (x) = 4 ओटा र

अनिषाले पाउने आँपका सङ्ख्या (y) = 2 ओटा



कुनै दुईओटा रेखीय समीकरणहरू ग्राफमा प्रस्तुत गर्दा समीकरणलाई प्रतिनिधित्व गर्ने रेखाहरू एउटा बिन्दुमा मात्र प्रतिच्छेदित हुन्छन् अथवा काटिन्छन् भने उक्त समीकरणहरूलाई युगपतरेखीय समीकरण **(simultaneous equations)** भनिन्छ । काटिएको बिन्दुको मान नै उक्त दुईओटा रेखीय समीकरणहरूको हल हुन्छ । रेखीय समीकरणहरू ग्राफमा प्रस्तुत गरी समाधान गर्ने विधिलाई लेखाचित्र विधि भनिन्छ ।

उदाहरण 1

लेखाचित्र विधिबाट हल गर्नुहोस् र मिले नमिलेको जाँचेर हेर्नुहोस् :

$3x - y = 7$ र $x - 2y = -1$

समाधान

यहाँ, $3x - y = 7$ .... (i)

र $x - 2y = -1$ .... (ii)

समीकरण (i) बाट

$3x - y = 7$

or, $y = 3x - 7$ मा $x = 2, 3$ र 4 राख्दा,

x	2	3	4
y	–1	2	5

तसर्थ यसका विन्दुहरू (2,-1), (3,2) र (4,5) भए ।

त्यस्तै समीकरण (ii) बाट

$x - 2y = -1$

or, $x = 2y - 1$ मा $y = 1, 2,$ र 3 राख्दा,

x	1	3	5
y	1	2	3

तसर्थ, यसका बिन्दुहरू (1,1), (3,2) र (5,3) भए ।

अब बिन्दुहरूलाई लेखाचित्रमा अङ्कन गर्दा

ग्राफमा $3x - y = 7$ र $x - 2y = -1$ समीकरणहरू बिन्दु (3, 2) मा प्रतिच्छेदित भएका छन् । तसर्थ $x = 3$ र $y = 2$ नै समीकरण (i) र (ii) को हल हो ।

जाँचेर हेर्दा,

$x = 3$ र $y = 2$ समीकरण

$3x - y = 7$ मा राख्दा,

LHS = $3x - y = 3 \times 3 - 2$

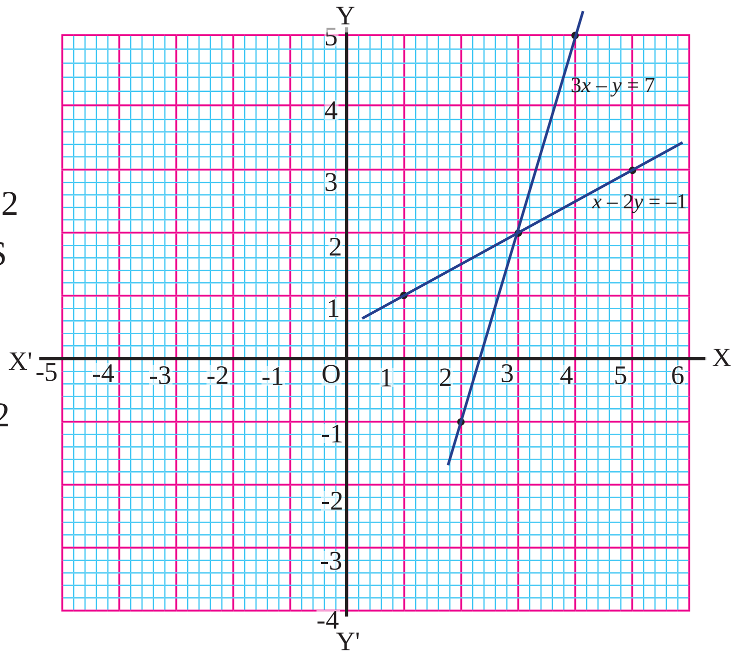
$= 9 - 2 = 7 =$ RHS

$x = 3$ र $y = 2$ समीकरण

$x - 2y = -1$ मा राख्दा,

LHS = $x - 2y = 3 - 2 \times 2$

$= 3 - 4 = -1 =$ RHS



उदाहरण 2

हाल बुबाको उमेर छोरीको उमेरको दोब्बरभन्दा 10 वर्ष बढी छ । यदि बुबा र छोरीको उमेरको फरक 25 छ भने उनीहरूको उमेर कति होला ?

समाधान

मानौँ हाल बाबुको उमेर $= x$

र छोरीको उमेर $= y$

प्रश्नानुसार,

$x = 2y + 10$ ………….(i)

र $x - y = 25$………...(ii)

समीकरण (i) बाट

$x = 2y + 10$ मा $y = 0, 5$ र 15 राख्दा,

x	10	20	40
y	0	5	15

तसर्थ यसका बिन्दुहरू (10, 0), (20, 5) र (40, 15) भए ।

त्यस्तै समीकरण (ii) बाट,

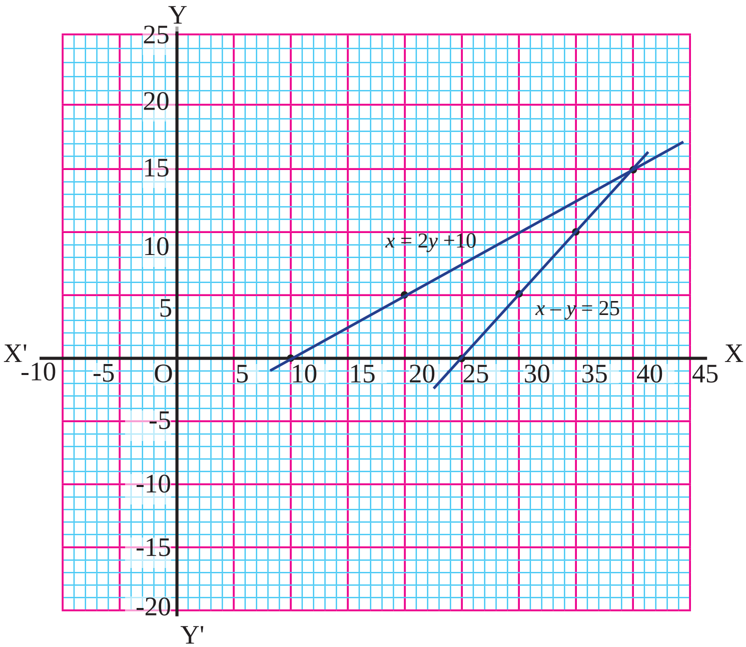
$x - y = 25$

अथवा $x = y + 25$ मा $y = 0, 5$ र 10 राख्दा,

x	25	30	35
y	0	5	10

तसर्थ यसका बिन्दुहरू (25, 0), (30, 5) र (35, 10) भए ।

अब, बिन्दुहरूलाई लेखाचित्रमा अङ्कन गर्दा,



ग्राफमा $x = 2y + 10$ र $x - y = 25$ समीकरणहरू बिन्दु (40, 15) प्रतिच्छेदित भएका छन् । तसर्थ,

अर्थात् $x = 40$ र $y = 15$ नै समीकरण (i) र (ii) को हल हो ।

अत: हाल बाबुको उमेर $(x) = 40$ वर्ष र छोरीको उमेर $(y) = 15$ वर्ष

शाब्दिक समस्यामा थाहा नभएका दुई सङ्ख्या ग्राफ विधीबाट पत्ता लगाउँदा ध्यान दिनु पर्ने कुराहरू :

(क) दिएको समस्यालाई राम्रोसँग पढेर चलराशि राखेर समीकरण निर्माण गर्ने

(ख) प्रत्येक समीकरणमा कुनै एउटा चलराशिको मान मानेर अर्को चलराशिको मान निकाली तालिकामा प्रस्तुत गर्ने

(ग) तालिकाका आधारमा ग्राफमा भरी सोहीअनुसार दुईओटा सरल रेखा खिच्ने

(घ) दुई सरल रेखा एकआपसमा काटिएको बिन्दुको निर्देशाङ्कनै आवश्यक सङ्ख्या हो ।

अभ्यास 12.1

1. तलका जोडी समीकरणहरूलाई लेखाचित्र विधिबाट हल गर्नुहोस् र जाँचेर हेर्नुहोस् :

(क) $x + y = 5, \quad x - y = 3$

(ख) $3x + y = 7, \quad x = 2y$

(ग) $x + y = 13, \quad 2x = y + 8$

(घ) $x + y = 6, x - y = 2$

(ङ) $x + y = 8, \quad x - y = 4$

(च) $4x + y = 2, \quad 3x - 2y = 7$

(छ) $x + 2y = 6, \quad 2y - x = 2$

(ज) $3x + 2y = 4, \ x - 3y = 5$

(झ) $2x = 5 + 3y, \ 5y = 2x - 3$

(ञ) $2x - 1 = y, \quad 3x - 2y = 0$

(ट) $x + 3 = 2y, \quad 2x + y = 14$

(ठ) $x - 2y = 5, \quad 2x + 3y = 10$

2. सरल गर्नुहोस् :

तलका जोडी समीकरणहरूलाई लेखाचित्र विधिबाट हल गर्नुहोस् र जाँचेर हेर्नुहोस् :

(क) दुईओटा सङ्ख्याको योगफल 15 छ र फरक 5 छ भने ती सङ्ख्याहरू पत्ता लगाउनुहोस् ।

(ख) दुईओटा सङ्ख्याको योगफल 12 छ र ठुलो सङ्ख्या सानो सङ्ख्याको तीन गुणा ठुलो छ भने ती सङ्ख्याहरू पत्ता लगाउनुहोस् ।

(ग) दुई सङ्ख्याको फरक 5 छ र सानो सङ्ख्याको 5 गुणा र ठुलो सङ्ख्याको 4 गुणा बराबर छ भने ती सङ्ख्याहरू पत्ता लगाउनुहोस् ।

(घ) तीनओटा कापी र चारओटा कलमको मूल्य रु.200 पर्छ र 5 ओटा कापी र 2 ओटा कलमको मूल्य रु.240 पर्छ भने एउटा कापी र एउटा कलमको मूल्य पत्ता लगाउनुहोस् ।

(ङ) बाबुको उमेर छोरीको उमेरको तेब्बरमा 3 कम छ । यदि बाबु र छोरीको उमेरबिचका फरक 37 वर्ष भए उनीहरूको उमेर पत्ता लगाउनुहोस् ।

(च) कमलाको अहिलेको उमेर विमलाको भन्दा 5 वर्ष बढी छ । कमलाको 5 वर्षपछिको उमेर विमलाको अहिलेको भन्दा दोब्बर हुन्छ भने उनीहरूको अहिलेको उमेर कति होला ?

(छ) विपनाभन्दा विपिन 4 वर्ष जेठा छन् । 2 वर्ष अगाडि विपिनको उमेर विपनाको भन्दा दुई गुणा बढी थियो भने उनीहरूको उमेर पत्ता लगाउनुहोस् ।

(ज) कुसुम र उनका बुबाको उमेरको फरक 20 वर्ष छ । यदि बुबाको उमेर कुसुमको भन्दा दुईगुणा र 4 ले बढी छ भने उनीहरूको उमेर पत्ता लगाउनुहोस् ।

झ) परीक्षामा रामले श्यामले भन्दा 20 अङ्क बढी प्राप्त गऱ्यो । यदि रामले प्राप्त गरेको अङ्क श्यामको भन्दा दोब्बर भए प्रत्येकले कति कति अङ्क प्राप्त गरेछन् । पत्ता लगाउनुहोस् ।

उत्तर

1. (क) (4,1) (ख) (2,1) (ग) (7,6) (घ) (4,2)
   (ङ) (6,2) (च) (1,-2) (छ) (2,2) (ज) (2,-1)
   (झ (4,1) (ञ) (2,3) (ट) (5,4) (ठ) (5,0)

2. (क) (10,5) (ख) (3,9) (ग) (20,25) (घ) (रु.40, रु.20)
   (ङ) (20,57) (च) (15 वर्ष, 10 वर्ष) (छ) (10 वर्ष, 6 वर्ष)
   (ज) (16 वर्ष, 36 वर्ष) (झ) (40 , 20)

12.2 खण्डीकरण विधिद्वारा वर्ग समीकरणको हल (Solving quadratic equations by factorization method)

क्रियाकलाप 2

तलका समीकरण अध्ययन गरी दिइएका प्रश्नहरूका बारेमा छलफल गर्नुहोस् :

(क) $x - 4 = 0$ (ख) $x^2 - 2x - 3 = 0$ (ग) $x^2 - 25 = 0$

(अ) माथिका समीकरणहरूमा कतिओटा चल राशि छन् ?

(आ) माथिका समीकरणहरूमा x को डिग्री कति छ ?

(इ) चलराशिको मान कति कति हुन्छ ?

(ई) माथिका समीकरणहरूमा के फरक छ ?

यहाँ, पहिलो समीकरणमा चलराशि x को सबैभन्दा ठुलो घाताङ्क 1 छ भने बाँकी सबै समीकरणहरूमा चलराशी x को सबैभन्दा ठुलो घाताङ्क 2 छ । पहिलो समीकरण एक चलयुक्त रेखीय समीकरण हो भने अरू दुई समीकरण वर्ग समीकरण हुन् ।

(क) $x - 4 = 0$

or, $x = 4$

(ख) $x^2 - 2x - 3 = 0$

or, $x^2 - (3 - 1)x - 3 = 0$

or, $x^2 - 3x + x - 3 = 0$

or, $x(x - 3) + 1(x - 3) = 0$

or, $(x - 3)(x + 1) = 0$

दुई गुणनखण्डको गुणनफल 0 हुन्छ भने यी दुईमध्ये एउटा शून्य हुनै पर्छ ।

either $(x - 3) = 0$ or $(x + 1) = 0$ हुन्छ ।

यदि $x - 3 = 0$ भए $x = 3$ र

यदि $x + 1 = 0$ भए $x = -1$ हुन्छ ।

अतः $x = 3, -1$ हुन्छ ।

(ग) $x^2 - 25 = 0$

or, $(x)^2 - (5)^2 = 0$

or, $(x + 5)(x - 5) = 0$

दुई गुणनखण्डको गुणनफल 0 हुन्छ भने यी दुईमध्ये एउटा शून्य हुनै पर्छ ।

either, $(x + 5) = 0$ $\quad \therefore x = -5$

or, $(x - 5) = 0$ $\quad \therefore x = 5$

अतः $x = 5, -5$ हुन्छ ।

डिग्री 2 भएको एक चलयुक्त समीकरणहरूलाई वर्ग समीकरण भनिन्छ । यो $ax^2 + bx + c = 0$ स्वरूपको हुन्छ । जहाँ $a \neq 0$ हुन्छ, जस्तै : $x^2 + 5x + 6 = 0$ वर्ग समीकरणमा चल राशिका दुईओटा मान हुन्छन् ।

उदाहरण 1

हल गर्नुहोस् :

(क) $x^2 - 6x + 8 = 0$ (ख) $4x^2 - 25 = 0$

समाधान

(क) यहाँ, $x^2 - 6x + 8 = 0$

or, $x^2 - (4 + 2)x + 8 = 0$

or, $x^2 - 4x - 2x + 8 = 0$

or, $x(x - 4) - 2(x - 4) = 0$

or, $(x - 4)(x - 2) = 0$

either, $(x - 4) = 0$ $\therefore x = 4$

or, $(x - 2) = 0$ $\therefore x = 2$

तसर्थ x को मान 4 र 2 हुन्छ ।

(ख) $4x^2 - 25 = 0$

or, $(2x)^2 - (5)^2 = 0$

or, $(2x + 5)(2x - 5) = 0$

either, $(2x + 5) = 0$ $\therefore x = -\frac{5}{2} = -2\frac{1}{2}$

or, $(2x - 5) = 0$ $\therefore x = \frac{5}{2} = 2\frac{1}{2}$

तसर्थ, x को मान $\pm 2\frac{1}{2}$ हुन्छ ।

उदाहरण 2

x को मान 2 र 3 हुने वर्ग समीकरण पत्ता लगाउनुहोस् :

समाधान

यहाँ,

x को मान 2 छ । त्यसैले $x = 2$ हुन्छ ।

or, $x - 2 = 0$

फेरि x को मान 3 छ । त्यसैले, $x = 3$

or, $x - 3 = 0$ हुन्छ ।

अब, $(x - 2)(x - 3) = 0$

or, $x(x - 3) - 2(x - 3) = 0$

or, $x^2 - 3x - 2x + 6 = 0$

or, $x^2 - 5x + 6 = 0$ नै आवश्यक वर्ग समीकरण हो ।

अभ्यास 12.2

1. **हल गर्नुहोस् :**

(क) $x^2 - 3x = 0$ (ख) $2x^2 - x = 0$ (ग) $9x^2 + 3x = 0$

(घ) $9y^2 - 4 = 0$ (ङ) $5x + 9x^2 = 0$ (च) $4y^2 - 7y = 0$

(छ) $x^2 - 49 = 0$ (ज) $169x^2 - 96 = 0$ (झ) $\frac{x^2}{4} - 36 = 0$

(ञ) $5x^2 - 125 = 0$ (ट) $x^2 - 7 = 29$ (ठ) $x^2 - 4x = 0$

2. **हल गर्नुहोस् :**

(क) $x^2 + 2x + 1 = 0$ (ख) $y^2 - y - 2 = 0$ (ग) $x^2 + x - 2 = 0$

(घ) $x^2 + 4x + 4 = 0$ (ङ) $x^2 - 10x - 24 = 0$ (च) $x^2 - 9x + 18 = 0$

(छ) $x^2 - 11x + 30 = 0$ (ज) $x^2 + 2x - 3 = 0$ (झ) $x^2 + 8x + 16 = 0$

(ञ) $x^2 - 8x + 16 = 0$ (ट) $x^2 + 10x + 25 = 0$ (ठ) $x^2 - 8x + 15 = 0$

(ड) $x^2 - 6x + 8 = 0$ (ढ) $2x^2 - x - 6 = 0$ (ण) $y^2 + 7y + 12 = 0$

(त) $7x^2 + 13x - 2 = 0$ (थ) $x^2 + 9x - 22 = 0$ (द) $x^2 - 18x + 77 = 0$

(ध) $2x^2 + 11x + 12 = 0$ (न) $3x^2 - 11x - 20 = 0$ (प) $10x^2 + 19x + 6 = 0$

(फ) $12x^2 - 11x + 2 = 0$ (ब) $3z^2 - 11z + 6 = 0$ (भ) $(x + 1) 2 - 4 = 0$

(म) $(p + 3)^2 - 16 = 0$ (य) $(x + 6)^2 - 36 = 0$ (र) $(x - 7)^2 - 64 = 0$

(ल) $100 - (x - 5)^2 = 0$

3. x को मान 1 र 2 हुने वर्ग समीकरण पत्ता लगाउनुहोस् ।

4. x को मान 3 र -2 हुने वर्ग समीकरण पत्ता लगाउनुहोस् ।

5. y को मान 2 र $\frac{1}{2}$ हुने वर्ग समीकरण पत्ता लगाउनुहोस् ।

उत्तर

1.	क) 0,3	ख) $0,\frac{1}{2}$	ग) $\frac{1}{3}, 0$	घ) $\pm\frac{2}{3}$	ङ) $0,-\frac{5}{9}$
	च) $0,\frac{7}{4}$	छ) ± 7	ज) $\pm\frac{14}{13}$	झ ± 12	ञ) ±5
	ट) ±6	ठ) 0,4			
2.	(क) -1, 1	ख) -1,2	(ग) 1, -2	(घ) -2, 2	(ङ) 12,-2
	(च) 3,6	(छ) 5, 6	(ज) -3, 1	(झ) -4	(ञ) 4
	(ट) -5	(ठ) 5, 3	(ड) 2,4	(ढ) $2, -\frac{3}{2}$	(ण) -4,-3
	(त)) $\frac{1}{7}, -2$	(थ) 2, -11	(द) 7,11	(ध) $-4, -\frac{3}{2}$	(न) $5, \frac{4}{3}$

मिश्रित अभ्यास

1. (क) $a^2 - b^2$ को विस्तारित रूप लेख्नुहोस् ।
   (ख) सरल गर्नुहोस् : $x^{(a-b)} \times x^{(b-c)} \times x^{(c-a)}$

2. (क) सरल गनुहोस् : $\frac{2b}{a+2b} + \frac{8b^2}{a^2-4b^2}$
   (ख) यदि $3x^2 - 8x - 16 = 0$ भए x को मान पत्ता लगाउनुहोस् :
   के दुवै मानले दिएको समीकरणलाई सन्तुष्ट गर्छन्, रुजु गर्नुहोस् ।

3. लेखाचित्रको प्रयोग गरी हल गर्नुहोस् । $2x - y = 5$ र $x - y = 1$

4. (क) तलका मध्ये कुन सही छैन ?

   (अ) $x^m \times x^n = x^{m+n}$ (आ) $x^m \div x^n = x^{m-n}$

   (इ) $(x^m)^n = x^{m+n}$ (ई) $x^{-m} = \frac{1}{x^m}$

   (ख) दिइएका अभिव्यञ्जकहरूको म.स. र ल.स. पत्ता लगाउनुहोस् :
   $x^2 - 5x + 6$ र $x - 3$

5. दुईओटा सङ्ख्याहरूको योगफल 12 र फरक 4 छ ।

(क) ठुलो सङ्ख्यालाई x र सानो सङ्ख्यालाई y मानेर समीकरण बनाउनुहोस् ।

(ख) लेखाचित्रको प्रयोग गरी माथिका समीकरणहरूको हल गर्नुहोस् ।

6. दुईओटा बीजीय अभिव्यञ्जक क्रमशः $x^2 + 5x + 6$ र $x^2 – 4$ छन् भने

(क) दिइएका अभिव्यञ्जकको महत्तम समापवर्तक पत्ता लगाउनुहोस् ।

(ख) दिइएका अभिव्यञ्जकको लघुत्तम समापवर्तक पत्ता लगाउनुहोस् ।

(ग) x को मान कति कति भएमा अभिव्यञ्जक $x^2 – 4$ को मान शून्य हुन्छ ?

7. दुईओटा बीजीय अभिव्यञ्जक क्रमशः $x^2 – 5x – 6$ र $x^2 + 2x +1$ छन् भने

क) दिएका अभिव्यञ्जकको महत्तम समापवर्तक पत्ता लगाउनुहोस् ।

ख) दिएका अभिव्यञ्जकको लघुत्तम समापवर्तक पत्ता लगाउनुहोस् ।

ग) x को मान कति कति भएमा अभिव्यञ्जक $x^2 – 5x – 6$ को मान शुन्य हुन्छ ?

8. दुईओटा बीजीय अभिव्यञ्जक क्रमशः $x^3 + 8x^2 + 16x$ र $x^3 + x^2 – 12x$ छन् भने

क) दिइएका अभिव्यञ्जकको महत्तम समापवर्तक पत्ता लगाउनुहोस् ।

ख) दिइएका अभिव्यञ्जकको लघुत्तम समापवर्तक पत्ता लगाउनुहोस् ।

ग) x को मान कति कति भएमा अभिव्यञ्जक $x^3 + x^2 – 12x$ को मान शून्य हुन्छ ?

9. दुई ओटा बीजीय अभिव्यञ्जक क्रमशः $x^2 + 5x + 6$ र $x^2 + 7x + 12$ छन् भने

क) दिइएका अभिव्यञ्जकको महत्तम समापवर्तक पत्ता लगाउनुहोस् ।

ख) दिइएका अभिव्यञ्जकको लघुत्तम समापवर्तक पत्ता लगाउनुहोस् ।

(ग) x को मान कति कति भएमा अभिव्यञ्जक $x^2 + 5x + 6$ को मान शून्य हुन्छ ?

(घ) प्रमाणित गर्नुहोस् : $\frac{1}{x^2 + 7x + 12} + \frac{1}{x^2 + 5x + 6} = \frac{2}{x^2 + 6x + 8}$

10. बीजीय भिन्न $\frac{x^2 - y^2}{y^2} \div \frac{x^2 + xy}{xy}$ मा

(क) ÷ चिह्नलाई गुणनमा बदल्दा दिइएको बीजीय भिन्नलाई कसरी लेखिन्छ ?

(ख) अंश र हरको छुट्टाछुट्टै खण्डीकरण गरी लघुत्तम रूपमा लेख्नुहोस् ।

11. बीजीय भिन्न $\frac{a}{a^2 + 3a + 2} - \frac{2}{a^2 - 1}$ को

(क) हरको खण्डीकरण गर्नुहोस् ।

(ख) दिइएको भिन्नमा हरको ल.स. लिई समान हर भएका भिन्नको रूपमा रूपान्तरण गर्नुहोस् ।

(ग) समान हर भएका भिन्नको सरल गरी न्यूनतम पदमा लेख्नुहोस् ।

12. (क) लेखाचित्रको प्रयोग गरी दिइएका समीकरणहरूको हल गर्नुहोस् ।

$x + 2y = 8$ र $x + y = 5$

(ख) माथिका समीकरणलाई कस्ता समीकरण भनिन्छ ?

13. (क) लेखाचित्रको प्रयोग गरी दिइएका समीकरणहरूको हल गर्नुहोस् ।

$x + 2y = 6$ र $2y - x = 2$

(ख) माथिका समीकरणलाई कस्ता समीकरण भनिन्छ ?

14. (क) दिइएको समीकरणको डिग्री कति हो ?

$x^2 - 7x + 12 = 0$

(ख) उक्त समीकरणलाई कस्तो समीकरण भनिन्छ ?

(ग) सो समीकरणको मूल पत्ता लगाउनुहोस् ।

15. तल चित्रमा देखाएअनुसारको कापी र कलमको संयुक्त मूल्य तल उल्लेख गरिएको छ ।

जम्मा मूल्य रु.320

जम्मा मूल्य रु.300

(क) एउटा कापीको मूल्यलाई x र एउटा कलमको मूल्यलाई y मानी समीकरण बनाउनुहोस् ।

(ख) एउटा कापी र एउटा कलमको मूल्य कति कति रहेछ, पत्ता लगाउनुहोस् ।

(ग) तपाइँसँग रु.450 छ । तपाइँले बराबर सङ्ख्यामा कापी र कलम किन्नुपर्नेछ । यस्तो अवस्थामा तपाइँ कतिओटा कापी र कलम बराबर सङ्ख्यामा किन्न सक्नुहुन्छ, गणना गर्नुहोस् ।

(घ) यदि कापी र कलमको मूल्य 10% ले बढेमा 3 ओटा कापी र 2 ओटा कलमको मूल्य कति कति पर्छ, पत्ता लगाउनुहोस् ।

16. आँगनमा केही बिरालाहरू र केही कुखुराहरू छन् । तपाईंले त्यहाँबाट कुल 10 टाउको र 26 खुट्टा गणना गर्नुभयो, अब पत्ता लगाउनुहोस् कि त्यहाँ कतिओटा बिरालो र कुखुरा छन् ?

17. $\frac{1}{(x+y)^{-1}} - \frac{1}{(y-z)^{-1}} - \frac{1}{(z+x)^{-1}} = 0$ हुन्छ भनी प्रमाणीत गर्नुहोस् ।

18. $\left(a^{(x+y)}\right)^{(x-y)}\left(a^{(y-x)}\right)^{(y+x)} = 1$ हुन्छ भनी प्रमाणीत गर्नुहोस् ।

उत्तर

1. क) $(x + b)(a - b)$ ख) 1 2. क) $\frac{2b}{a-2b}$ ख) शिक्षकलाई देखाउनुहोस् ।

3. शिक्षकलाई देखाउनुहोस् । 4. क) O ख) $(x - 3)$ र $(x - 2)(x - 3)$

5. क) $x + y = 12, x - y = 4$ ख) $x = 8, y = 4$

6. क) $(x + 2)$ ख) $(x^2 - 4)(x + 3)$ ग) ± 2

7. क) $(x + 1)$ ख) $(x + 1)^2 (x - 6)$ ग) 6, –1

8. क) $x(x + 4)$ ख) $x(x + 4)^2 (x - 3)$ ग) 0, 3 र –4

9. क) $(x + 3)$ ख) $(x + 2)(x + 3)(x + 4)$ ग) –2 र –3

10. क) $\frac{x^2 - y^2}{y^2} \times \frac{xy}{x^2 + xy}$ ख) $\frac{x - y}{y}$

11. (क) $a^2 + 3a + 2 = (a + 2)(a + 1), a^2 -1 = (a + 1)(a -1)$

ख) $\frac{a(a-1)}{(a+2)(a+1)(a-1)} - \frac{2(a+2)}{(a+2)(a+1)(a-1)}$ (ग) $\frac{(a-4)}{(a+2)(a-1)}$

12. (क) रेखीय समीकरण ख) (2, 3)

13. (क) रेखीय समीकरण ख) (2, 2)

14. (क) डिग्री 2 ख) वर्ग समीकरण ग) (3, 4)

15. कलमको मूल्य रु. 40 र कापीको मूल्य रु. 50

16. 3 बिराला र 7 कुखुरा

17 र 18 शिक्षकलाई देखाउनुहोस् ।

पाठ 13

रेखा र कोणहरू
(Lines and Angles)

13.0 पुनरवलोकन (Review)

दिइएका चित्र हेरी कहाँ कहाँ समानान्तर रेखाहरू बनेका हुन्छन्, समूहमा छलफल गर्नुहोस् :

(क) ढोकाको किनारा

(ख) नदीका दुई किनारा

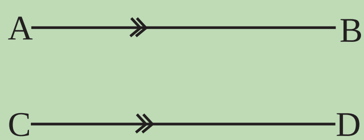
(ग) बाटाका दुई किनारा

(घ) पुलका दुई किनारा

(ङ) टेबुलका विपरीत किनारा

(च) वृत्ताकार बगैँचाका दुई किनारा

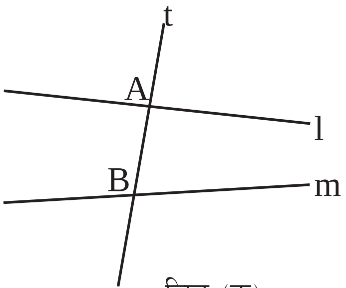
यदि दुई सिधा रेखाखण्डलाई अनन्तसम्म लम्ब्याउँदा पनि आपसमा प्रतिच्छेदन हुँदैनन् र तिनीहरू बिचका लम्ब दुरी सधैँ समान रहन्छन् भने त्यस्ता रेखाहरूलाई समानान्तर रेखा भनिन्छ । सँगैको चित्रमा सिधा रेखा AB र CD समानान्तर छन् । त्यसैले सङ्केतमा AB//CD लेखिन्छ । यदि दुई रेखाहरू बिचको लम्ब दुरी बराबर छ भने ती दुई रेखाहरू परस्पर समानान्तर हुन्छन् ।



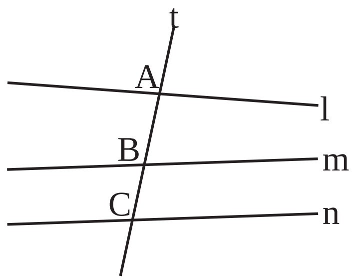
13.1 सिधा रेखाहरू र छेदक (Straight lines and Transversal)

क्रियाकलाप 1

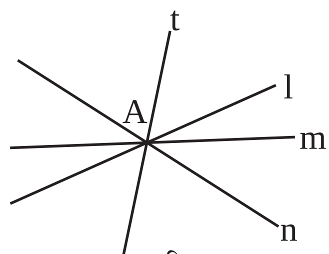
दिइएका चित्रमा कुन कुन छेदक हुन् ? कारणसहित जोडीमा छलफल गर्नुहोस् :



चित्र (क)



चित्र (ख)



चित्र (ग)

यहाँ,

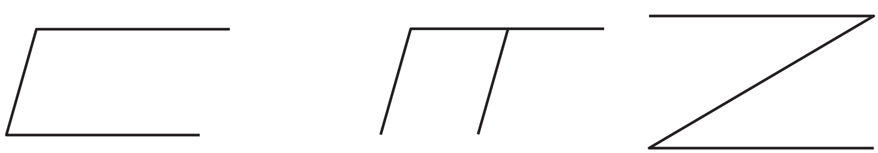
पहिलो चित्रमा, l र m दुई सिधा रेखा हुन् भने t छेदक हो जसले l र m लाई दुई फरक फरक बिन्दु A र B मा काटेको छ । त्यसैगरी दोस्रो चित्रमा, l, m र n तीन सिधा रेखा हुन् भने t छेदक हो जसले l, m र n लाई तीन फरक फरक बिन्दु A, B र C मा काटेको छ । तर तेस्रो चित्रमा भने t छेदक होइन किन होला ?

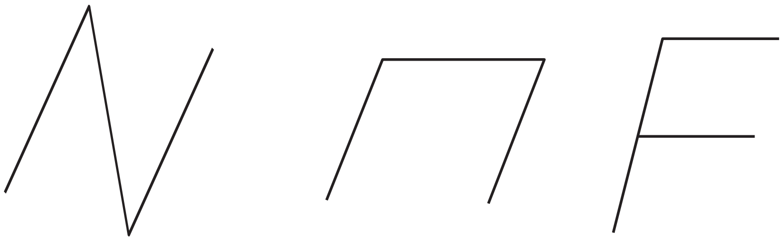
दुई वा सोभन्दा बढी सिधारेखालाई फरक फरक बिन्दुमा काट्ने रेखालाई छेदक भनिन्छ ।

13.1.1 सिधा रेखाहरूलाई छेदकले काट्दा बन्ने विभिन्न कोणहरू

क्रियाकलाप 2

फरक वा समान नाप भएका केही सिन्काहरू लिनुहोस् र जोडीमा सिन्काको प्रयोग गरी चित्रमा देखाइएको जस्तै गरी फरक फरक दिशामा फर्किएका अङ्ग्रेजी अक्षरको Z, C र F लेख्ने अभ्यास गर्नुहोस् ।





तपाईँले बनाएको जस्तै आकृतिलाई कापीमा उतार्नुहोस् र प्रत्येक रेखाखण्डहरूको नामकरण गर्नुहोस् ।

दुईओटा रेखाखण्डलाई जोड्ने रेखाखण्डलाई दुवैतिर तन्काउने हो भने के हुन्छ, होला ?

अब सबै चित्रमा ती रेखाखण्डलाई दुवैतिर तन्काउनुहोस् र यसरी बनेका प्रत्येक चित्रका जोडी कोणहरू र तिनीहरूका विशेषताबारे जोडीमा साथीसँग छलफल गर्नुहोस् । तल दिइएको जस्तो तालिकामा भर्नुहोस् र निम्नलिखित प्रश्नहरूमा छलफल गर्नुहोस् :

चित्र न.	जोडी कोण	विशेषता		
		छेदकको दुवैतिर वा एकातिर पर्ने ?	अनासन्न वा आसन्न के हो ?	दुवै बाहिरी वा भित्री कस्ता कोण हुन् ?

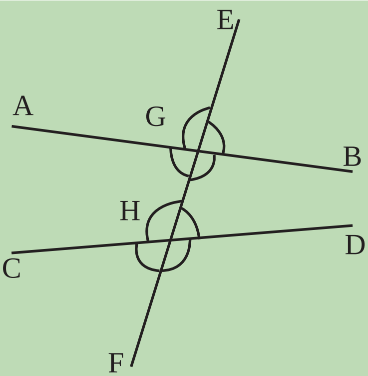
(क) छेदकको दुवैतिर परेका अनासन्न भित्री कोणहरूलाई के भनिन्छ ?

(ख) छेदकको एकैतिर परेका एउटा बाहिरी र अर्को भित्री अनासन्न जोडी कोणहरूलाई के भनिन्छ ?

(ग) छेदकको दुवैतिर परेका भित्री अनासन्न जोडी कोणहरूलाई के भनिन्छ ?

(घ) जोडी कोणहरूको पहिचानमा अङ्गेजी अक्षर Z, C र F कसरी उपयोगी होलान् ?

एकान्तर कोणहरू : दुई सिधा रेखालाई एउटा छेदकले काट्दा छेदकको दुवैतिर परेका अनासन्न भित्री कोणह(रूलाई एकान्तर कोण भनिन्छ । सँगैको चित्रमा $\angle AGH$ र $\angle DHG$ तथा $\angle BGH$ र $\angle CHG$ एकान्तर कोण हुन् ।



सङ्गत कोणहरू : दुई सिधा रेखालाई एउटा छेदकले काट्दा छेदकको एकैतिर परेका एउटा बाहिरी र अर्को

भित्री अनासन्न जोडी कोणलाई सङ्गत कोण भनिन्छ । सँगैको चित्रमा ∠AGE र ∠CHG, ∠BGE र ∠DHG, ∠CHF र ∠AGH तथा ∠BGH र ∠DHF सङ्गत कोण हुन् ।

क्रमागत भित्री कोणहरू : दुई सिधा रेखाहरूलाई एउटा छेदकले काट्दा छेदकको एकैतिर परेका अनासन्न भित्री कोणहरूलाई क्रमागत भित्री कोण भनिन्छ । सँगैको चित्रमा ∠AGH & ∠CHG तथा ∠BGH & ∠DHG क्रमागत भित्री कोण हुन् ।

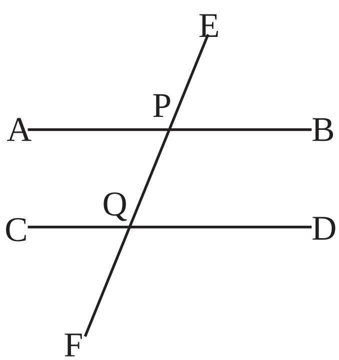
13.2 समानान्तर रेखाहरू र छेदक (Parallel lines and Transversal)

13.2.1 दुई समानान्तर रेखाहरूलाई छेदकले काट्दा बन्ने एकान्तर कोणहरू बिचको सम्बन्ध

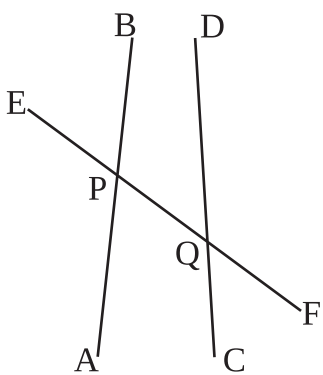
क्रियाकलाप 3

दिइएको चित्रमा कुन कुन छेदक हुन् ? कारणसहित जोडीमा छलफल गर्नुहोस् ।

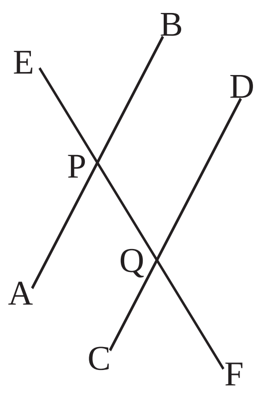
चित्रमा देखाइएको जस्तै विभिन्न अवस्थामा दुई सिधा रेखालाई छेदकले काटिएका फरक फरक तीनओटा चित्रहरू बनाउनुहोस् ।



चित्र (क)



चित्र (ख)



चित्र (ग)

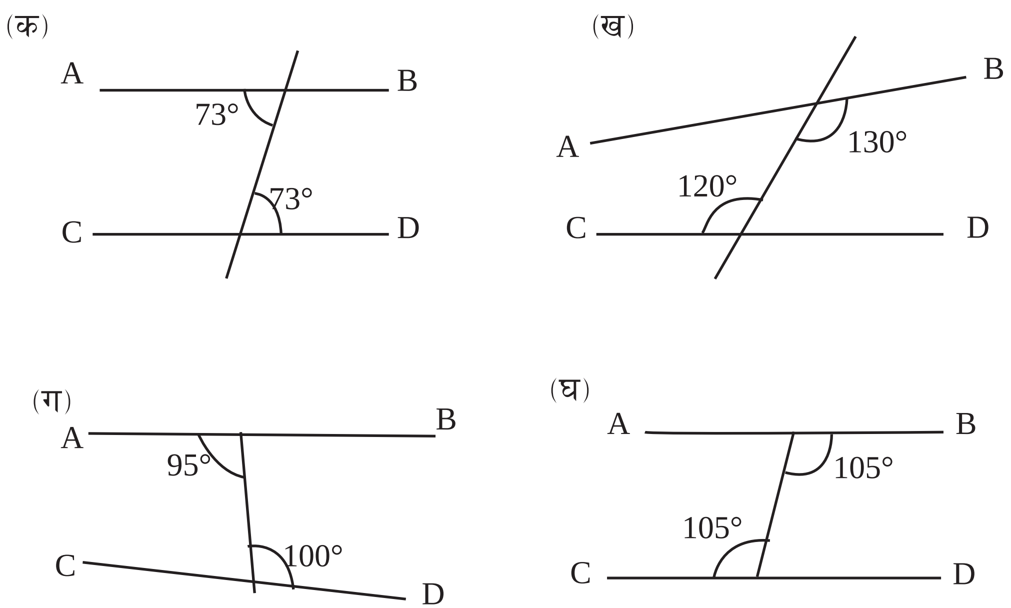
माथिको चित्रमा भएका एकान्तर कोणहरूको नाप प्रोट्याक्टरको प्रयोग गरी नाप्नुहोस् र तलको तालिकामा भर्नुहोस् । साथै सेटस्वायरको प्रयोग गरी प्रत्येक चित्रमा दिइएका सिधा रेखाहरू समानान्तर भए नभएको समेत यकिन गरी तालिकामा भर्नुहोस् ।

चित्र	जोडी 1		जोडी 2		परिणाम (एकान्तर कोणहरू बिचको सम्बन्ध)	रेखाको अवस्था (समानान्तर भए नभएको)
(क)	∠APQ	∠PQD	∠BPQ	∠PQC		
(ख)						
(ग)						
निष्कर्ष : दुई समानान्तर रेखालाई छेदकले काट्दा बन्ने एकान्तर कोणको नाप बराबर हुन्छ ।						

विचारणीय प्रश्न : यदि दुई रेखा समानान्तर नहुँदा एकान्तर कोणबिचको सम्बन्ध के हुन्छ होला ?

उदाहरण 1

तल चित्रमा दिइएका एकान्तर कोणहरूका आधारमा AB//CD छन् वा छैनन्, छुट्याउनुहोस् :



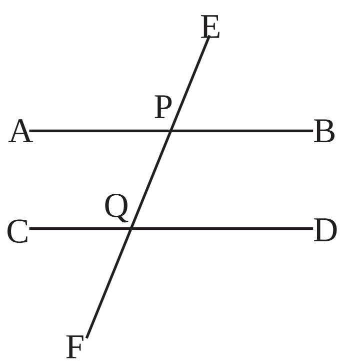
समाधान

(क) छन् । (ख) छैनन् । (ग) छैनन् (घ) छन् ।

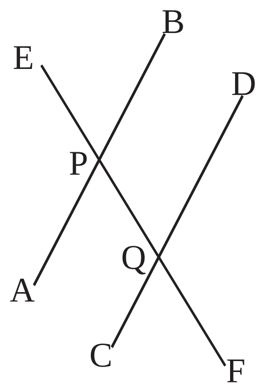
13.2.2 दुई समानान्तर रेखालाई छेदकले काट्दा बन्ने सङ्गत कोणहरू बिचको सम्बन्ध

क्रियाकलाप 4

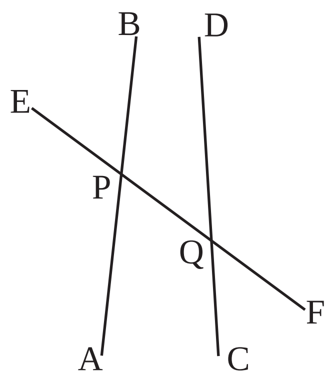
चित्रमा देखाइएको जस्तै विभिन्न अवस्थामा दुई सिधा रेखालाई छेदकले काटिएका फरक फरक तीनओटा चित्रहरू बनाउनुहोस् ।



चित्र (क)



चित्र (ख)



चित्र (ग)

माथिका चित्रमा भएका सङ्गत कोणहरूको नाप प्रोट्याक्टरको प्रयोग गरी नाप्नुहोस् र तलको तालिकामा भर्नुहोस् । साथै सेटस्वायरको प्रयोग गरी प्रत्येक चित्रमा दिइएका सिधा रेखाहरू समानान्तर भए नभएको समेत यकिन गरी तालिकामा भर्नुहोस् ।

चित्र	जोडी 1		जोडी 2		जोडी 3		जोडी 4		परिणाम (एकान्तर कोणहरू बिचको सम्बन्ध)	रेखाको अवस्था (समानान्तर भए नभएको)
(क)	∠EPA	∠PQC	∠EPB	∠PQD	∠APQ	∠CQF	∠BPQ	∠DQF		
(ख)										
(ग)										

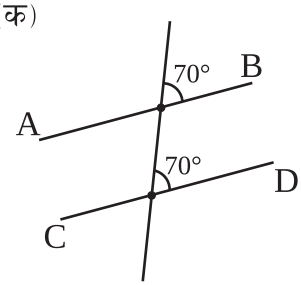
निष्कर्ष : दुई समानान्तर रेखाहरूलाई छेदकले काट्दा बन्ने सङ्गत कोणहरूको नाप बराबर हुन्छ ।

विचारणीय प्रश्न : यदि दुई रेखाहरू समानान्तर नहुँदा सङ्गत कोणहरू बिचको सम्बन्ध के हुन्छ होला ?

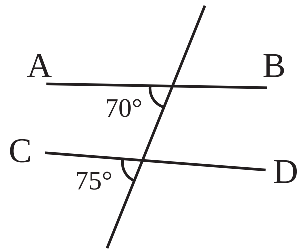
उदाहरण 2

तल चित्रमा दिइएका सङ्गत कोणहरूको आधारमा AB//CD छन् वा छैनन्, छुट्याउनुहोस् :

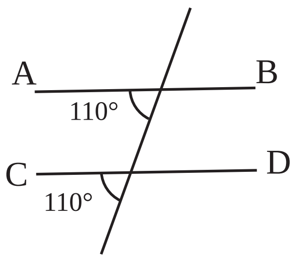
(क)



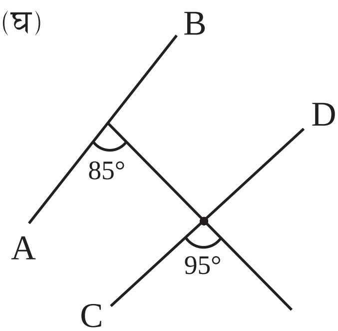
(ख)



(ग)



(घ)



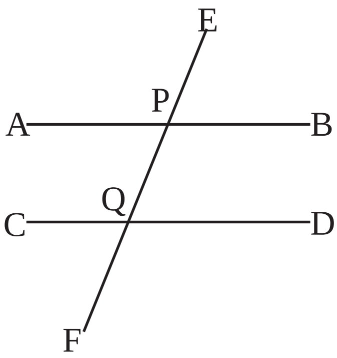
समाधान

(क) छन् । (ख) छैनन् । (ग) छन् । (घ) छैनन् ।

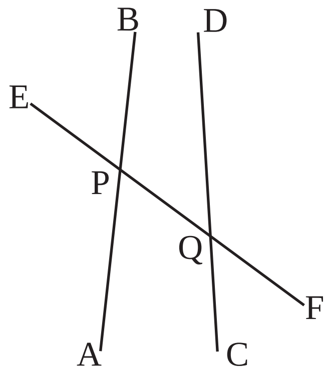
13.2.3 दुई समानान्तर रेखालाई छेदकले काट्दा बन्ने क्रमागत भित्री कोणहरू बिचको सम्बन्ध

क्रियाकलाप 5

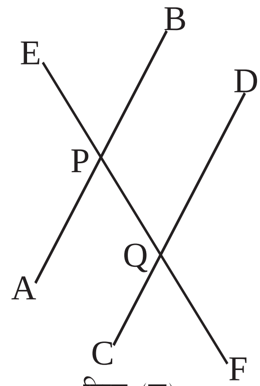
चित्रमा देखाइएको जस्तै विभिन्न अवस्थामा दुई सिधा रेखालाई छेदकले काटिएका फरक फरक तीनओटा चित्र बनाउनुहोस् ।



चित्र (क)



चित्र (ख)



चित्र (ग)

माथिका चित्रमा भएका क्रमागत भित्री कोणहरूको नाप प्रोट्याक्टरको प्रयोग गरी नाप्नुहोस् र तलको तालिकामा भर्नुहोस् । साथै सेटस्वायरको प्रयोग गरी प्रत्येक चित्रमा दिइएका सिधा रेखाहरू समानान्तर भए नभएको समेत यकिन गरी तालिकामा भर्नुहोस् ।

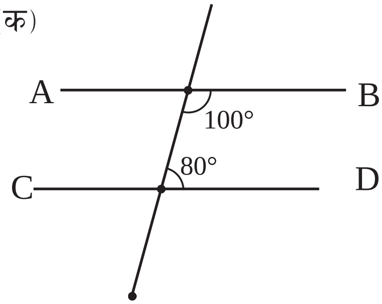
<table>
<tr><td>चित्र</td><td colspan="2">जोडी 1</td><td colspan="2" rowspan="2">∠APQ + ∠PQC</td><td colspan="2">जोडी 2</td><td colspan="2" rowspan="2">∠BPQ + ∠PQD</td><td>परिणाम (क्रमागत भित्री कोणहरू बिचको सम्बन्ध)</td><td>रेखाको अवस्था (समानान्तर भए नभएको)</td></tr>
<tr><td>(क)</td><td>∠APQ</td><td>∠PQC</td><td>∠BPQ</td><td>∠PQD</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>(ख)</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>(ग)</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td colspan="11">निष्कर्ष : दुई समानान्तर रेखालाई छेदकले काट्दा बन्ने क्रमागत भित्री कोणहरूको योग दुई समकोण हुन्छ ।</td></tr>
</table>

विचारणीय प्रश्न : यदि दुई रेखा समानान्तर नहुँदा क्रमागत भित्री कोणहरूको योगफल कति हुन्छ ?

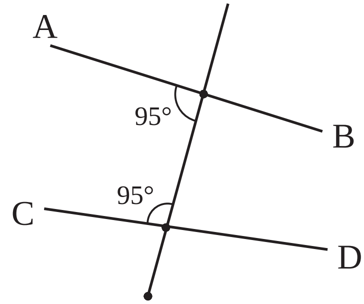
उदाहरण 3

तल चित्रमा दिइएका क्रमागत भित्री कोणहरूको सम्बन्धका आधारमा AB//CD छन् वा छैनन्, छुट्याउनुहोस् :

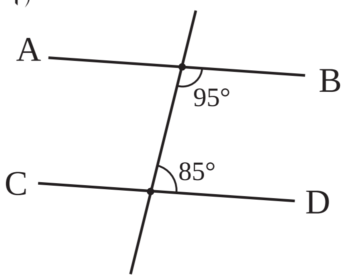
(क)



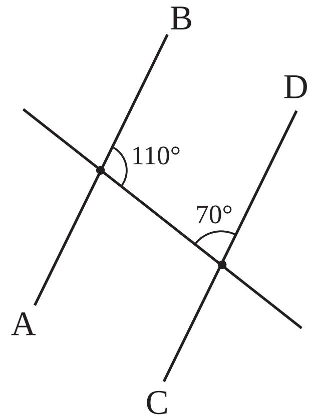
(ख)



(ग)



(घ)



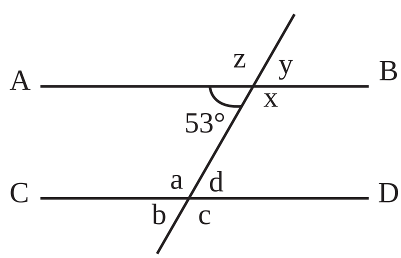
समाधान

(क) छन् । (ख) छैनन् । (ग) छन् । (घ) छन् ।

उदाहरण 4

सँगै दिइएको चित्रमा रेखा AB र CD समानान्तर रेखाहरू हुन् । दिइएको कोणका आधारमा बाँकी कोणको नाप पत्ता लगाउनुहोस् ।

समाधान



बाँकी कोणहरूलाई चित्रमा देखाए जस्तै

a, b, c, d, x, y, z मान्दा,

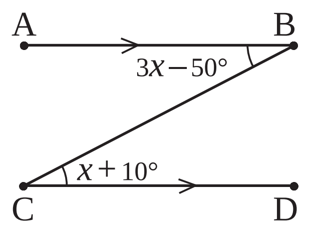
$b = 53^o$ (सङ्गति कोणहरू बराबर हुन्छन् ।)

$d = 53^o$ (एकान्तर कोणहरू बराबर हुन्छन्)

$y = d = 53^o$ (d र y सङ्गति कोणहरू बराबर हुन्छन्)

$a + 53° = 180°$ (क्रमागत भित्री कोणहरूको योग 180° हुन्छ)
$z = a = 127°$ (z र a सङ्गत कोणहरू बराबर हुन्छन्)
$x = a = 127°$ (एकान्तर कोणहरू बराबर हुन्छन्)
$c = a = 127°$ (c र a विपरीत शीर्षकोणहरू बराबर हुन्छन्)

उदाहरण 5



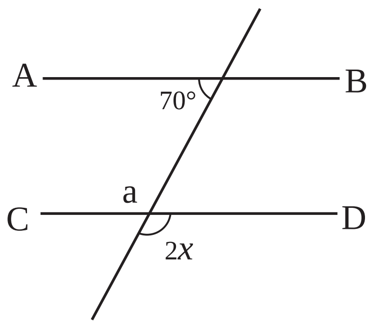
दिइएको चित्रमा AB//CD छ। ∠ABC र ∠DCB को मान निकाल्नुहोस् :

समाधान

यहाँ,

$3x – 50° = x + 10°$ (एकान्तर कोणहरू बराबर हुन्छन् ।)
or, $3x – x = 50° + 10°$
or, $2x = 60°$
$\therefore x = 30°$
$\therefore \angle ABC = 3x – 50° = (3×30)° – 50°$
$= 90° – 50° = 40°$
$\therefore \angle ABC = \angle DCB = 40°$

उदाहरण 6



तलको चित्रमा x को मान कति हुँदा AB र CD समानान्तर हुन्छन् ?

समाधान

यहाँ,

$a = 2x$ हुन्छ ।(∴ a र 2x विपरीत शीर्षाभिमुख कोण भएकाले बराबर हुन्छन् ।

AB//CD हुनका लागि $a + 70° = 180°$ हुनुपर्दछ ।

or, $a + 70° = 180°$

or, $2x = 80° - 70°$

or, $2x = 110°$

$$\therefore x = \frac{110°}{2}$$

अतः $x = 55°$ हुँदा रेखाहरू समानान्तर हुन्छन् ।

अभ्यास 13.1

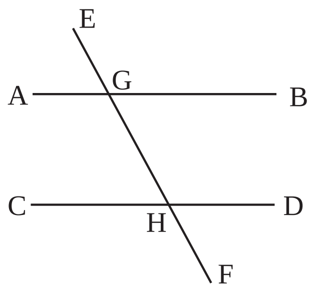
1. खाली ठाउँ भर्नुहोस् :

(क) दुई रेखा समानान्तर भएको अवस्थामा एकान्तर कोणहरू ....हुन्छन् ।

(ख) दुई रेखा समानान्तर भएको अवस्थामा सङ्गत कोणहरू ....हुन्छन् ।

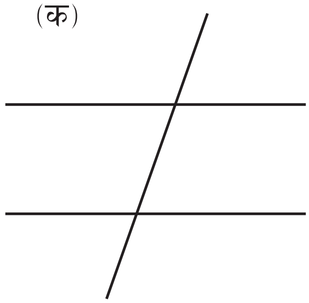
(ग) दुई रेखा समानान्तर भएको अवस्थामा क्रमागत भित्री कोणहरूको योगफल ....हुन्छ ।

2. तलको चित्रका आधारमा सङ्गत कोणहरू, एकान्तर कोणहरू र क्रमागत भित्री कोणहरू लेख्नुहोस् :

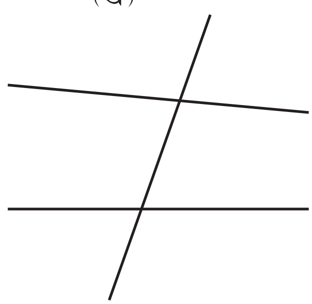


3. तलका रेखाहरू समानान्तर छन् वा छैनन् भन्ने कुरा कोणहरू नापेर छुट्याउनुहोस् :

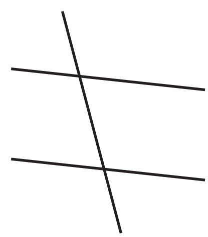
(क)



(ख)



(ग)

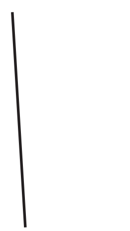


4. तल दिइएका सिधा रेखाहरूमा छेदक खिचेर कोण नापी दिइएका सिधा रेखाहरू समानान्तर भए नभएको जाँच्नुहोस् :

(क)

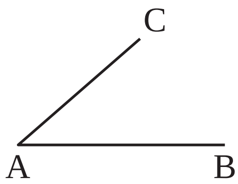
(ख)

(ग)

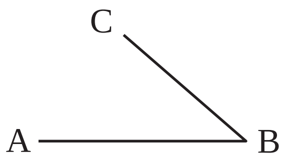


5. AB // CD हुने गरी तलका चित्रमा CD रेखा खिच्नुहोस् :

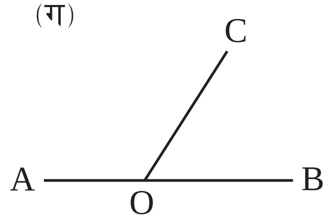
(क)



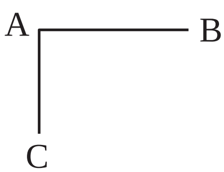
(ख)



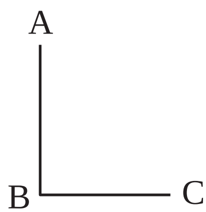
(ग)



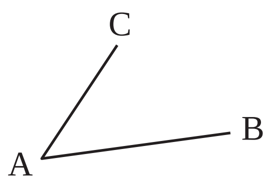
(घ)



(ङ)

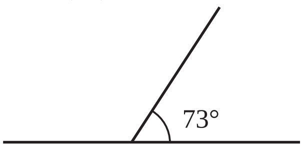


(च)

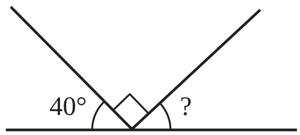


6. दिइएको कोणका आधारमा बाँकी कोणहरूको नाप पत्ता लगाउनुहोस् :

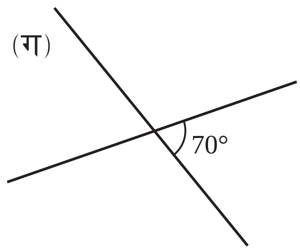
(क)



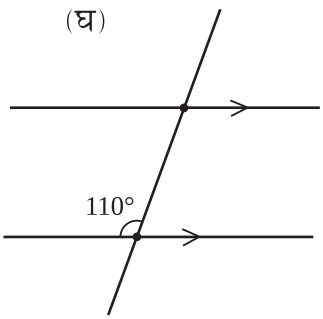
(ख)



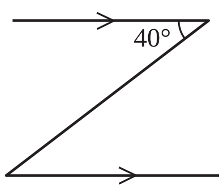
(ग)



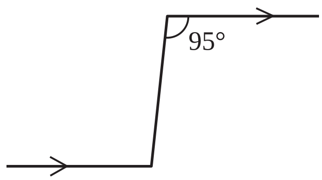
(घ)



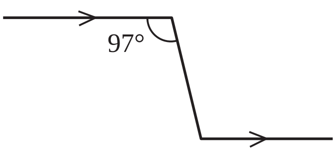
(ङ)



(च)

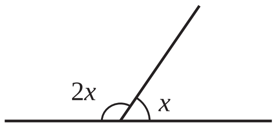


(छ)

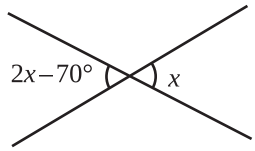


7. दिइएको कोणका आधारमा x को मान पत्ता लगाउनुहोस् :

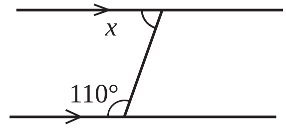
(क)



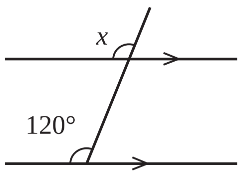
(ख)



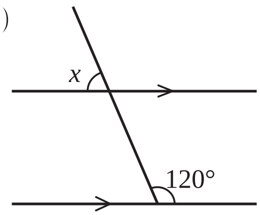
(ग)



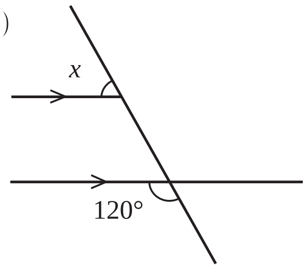
(घ)



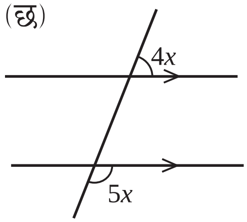
(ङ)



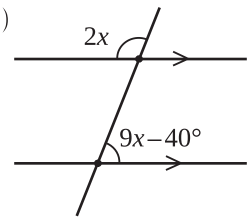
(च)



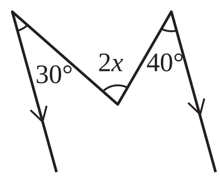
(छ)



(ज)



(ञ)



परियोजना कार्य

1. लामो खालका बाँसका सिन्का वा मोटा खालका लट्ठी लिई दुईओटा सिधा लट्ठीम(ाथि पर्ने गरी एक अर्कोलाई बाँध्नुहोस् । पालैपालो प्रत्येक लट्ठीलाई फरक फरक कोण बनाउने गरी घुमाउनुहोस् ।
2. उक्त अवस्थामा जोडी कोण एकान्तर, सङ्गत, क्रमागत छुट्टिने गरी सङ्केत गर्नुहोस् ।
3. लट्ठी घुमाउँदा बनेका महत्त्वपूर्ण कोणहरूको अवस्थालाई नोट गर्नुहोस् ।
4. तपाईंले निकालेका कुराहरू प्रस्तुतिका लागि चार्टपेपरमा तयार गर्नुहोस् ।
5. चार्टपेपर कक्षाको भित्तामा टाँसेर प्रस्तुति गर्नुहोस् । साथै साथीको प्रस्तुतिमा तपाईंका कुरा आएको नआएको टिपोट गरी छलफल गर्नुहोस् ।

उत्तर

1 देखि 5 सम्म शिक्षकलाई देखाउनुहोस् ।

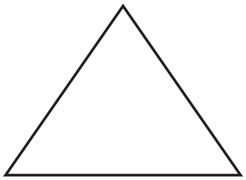
6. (क) 107° (ख) 50° (ग) र (घ) शिक्षकलाई देखाउनुहोस् । (ङ) 40°
   (च) 95° (छ) 97°

7. (क) 60° (ख) 70° (ग) 70° (घ) 120° (ङ) 60°
   (च) 20° (छ) 20° (ज) 20° (झ) 35°

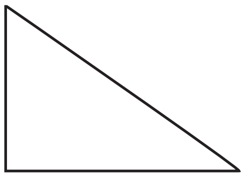
पाठ 14 समतलीय आकृतिहरू (Plane Figures)

14.0 पुनरवलोकन (Review)

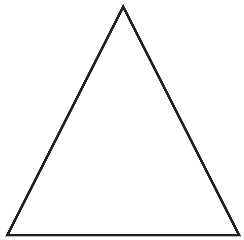
दिइएका त्रिभुजहरूलाई भुजा र कोणका आधारमा वर्गीकरण गर्नुहोस् :



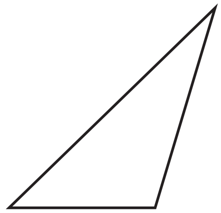
चित्र (क)



चित्र (ख)



चित्र (ग)

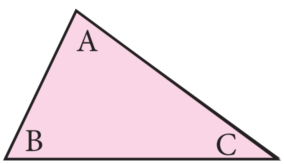


चित्र (घ)

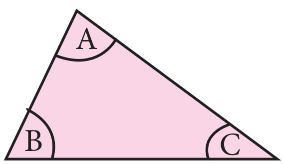
14.1 त्रिभुजका गुणहरूको पहिचान र परीक्षण (Identification and verification of the properties of Triangles)

क्रियाकलाप 1

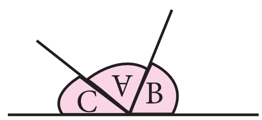
एउटा चार्ट पेपर लिनुहोस् र उक्त पेपरमा निश्चित नाप भएको त्रिभुज बनाउनुहोस् । अब चित्र (ख) मा देखाएको जस्तै गरी तीनओटा कोणलाई काट्नुहोस् र चित्र (ग) मा जस्तै गरी ती कोणहरूलाई मिलाएर राख्नुहोस् । कस्तो कोण बन्यो, छलफल गरी निष्कर्ष कक्षामा प्रस्तुत गर्नुहोस् ।



चित्र (क)



चित्र (ख)



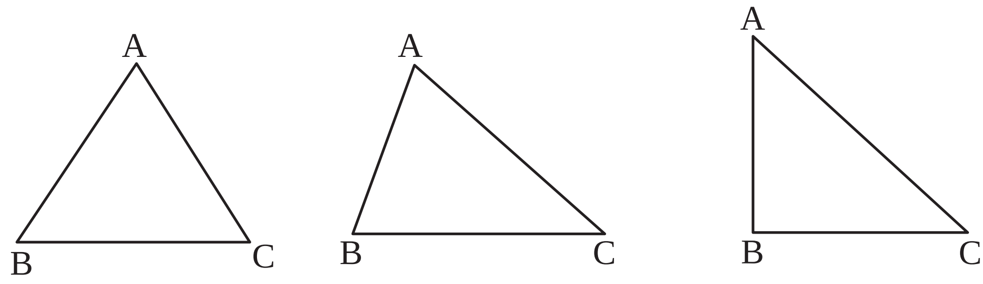
चित्र (ग)

त्रिभुजका तीनओटै कोण मिलाएर राख्दा सरल कोण बनेको छ । सरल कोणमा बनेका कोणहरूको जम्मा योगफल 180° हुन्छ ।

> त्रिभुजका तीनओटा भित्री कोणहरूको योगफल 180° हुन्छ ।

क्रियाकलाप 2

चित्रमा दिइएको जस्तै फरक फरक आकार र नाप भएका तीनओटा त्रिभुजहरू बनाउनुहोस् :



चित्र (क) चित्र (ख) चित्र (ग)

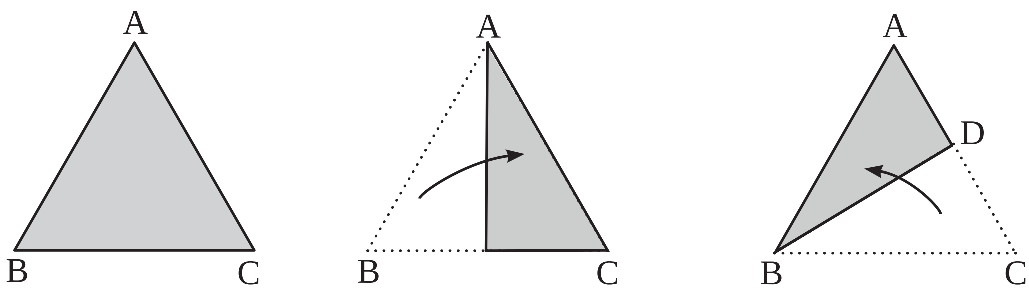
अब प्रोट्याक्टरको सहायताले माथिका प्रत्येक कोणहरूको नाप लिई तल दिइएका तालिकामा भर्नुहोस् र निष्कर्ष निकाल्नुहोस् :

चित्र न.	$\angle BAC$	$\angle ABC$	$\angle BCA$	$\angle BAC + \angle ABC + \angle BCA$	नतिजा
(क)					
(ख)					
(ग)					
निष्कर्ष :					

(ख) समबाहु त्रिभुजका कोणहरूको परीक्षण

क्रियाकलाप 3

एउटा चार्टपेपर लिनुहोस् र त्यसमा एउटा समबाहु त्रिभुज बनाउनुहोस्। उक्त त्रिभुजलाई कैँचीले काटेर निकाल्नुहोस् र चित्रमा देखाए जस्तै गरी पट्याउँदै जानुहोस् र दिइएका प्रश्नहरूका बारेमा छलफल गर्नुहोस्।



चित्र (क) चित्र (ख) चित्र (ग)

(क) चित्रमा समबाहु त्रिभुज ABC को शीर्षबिन्दु B लाई C मा पर्ने गरी पट्याउँदा कोण B र कोण C को सम्बन्ध कस्तो हुन्छ ?

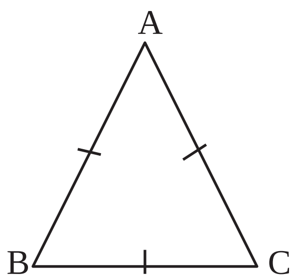
(ख) त्यस्तै शीर्षबिन्दु C लाई A मा पर्ने गरी पट्याउँदा कोण C र कोण A को सम्बन्ध कस्तो हुन्छ ?

(ग) के समबाहु त्रिभुजका सबै कोणहरू बराबर हुन्छन् ? छलफल गरी निष्कर्ष प्रस्तुत गर्नुहोस् ।

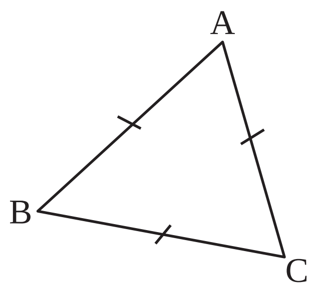
समबाहु त्रिभुजका सबै कोणहरू बराबर हुन्छन् । त्यसैले प्रत्येक कोण $60^\circ/60^\circ$ का हुन्छन् ।

क्रियाकलाप 4

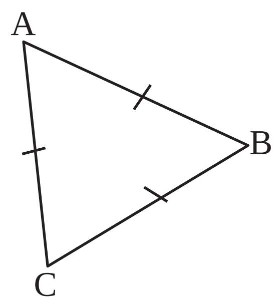
चित्रमा दिइए जस्तै गरी फरक फरक नाप भएका तीनओटा समबाहु त्रिभुजहरू बनाउनुहोस् :



चित्र (क)



चित्र (ख)



चित्र (ग)

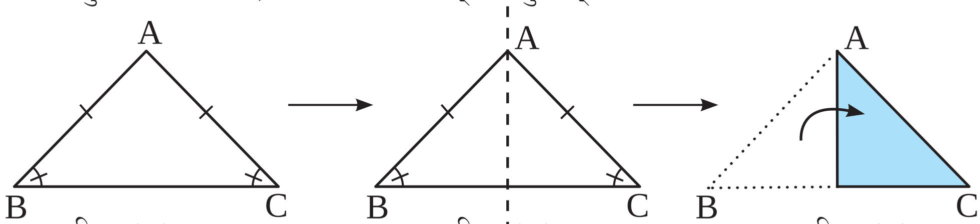
अब प्रोट्याक्टरको सहायताले माथिका प्रत्येक कोणहरूको नाप लिई तल दिइएको तालिकामा भर्नुहोस् र निष्कर्ष निकाल्नुहोस् :

चित्र न.	$\angle CAB$	$\angle ABC$	$\angle BCA$	नतिजा
(क)				
(ख)				
(ग)				
निष्कर्ष :				

(ग) समद्विबाहु त्रिभुजका आधारका कोणहरूको परीक्षण

क्रियाकलाप 5

एउटा फोटोकपी पेपर लिनुहोस् । त्यसमा दुईओटा भुजा बराबर भएको एउटा त्रिभुज बनाउनुहोस् र त्यसलाई कैँचीको सहायताबाट काटेर निकाल्नुहोस् । अब उक्त त्रिभुजमा भएका बराबर भुजाहरूलाई चित्रमा देखाए जस्तै गरी चिह्न लगाउनुहोस् र आधारका कोणहरूलाई पनि चिह्न लगाउनुहोस् । अब चित्र ख र ग मा देखाइएको जस्तै गरी शीर्षबिन्दु B र C लाई खप्टिने गरी पट्याउनुहोस् ।



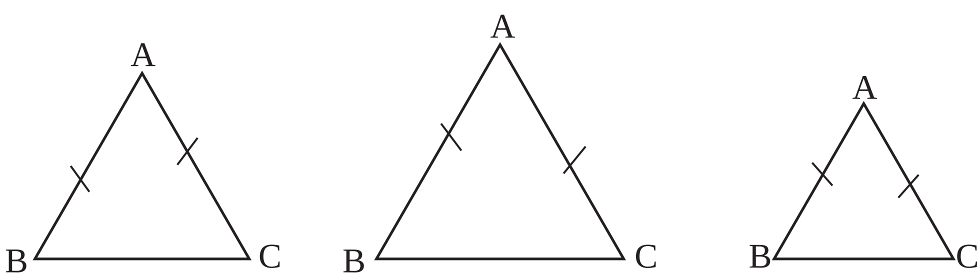
चित्र (क) चित्र (ख) चित्र (ग)

कोण B र C को बिचमा कस्तो सम्बन्ध पाउनुभयो, साथीसँग छलफल गर्नुहोस् ।

समद्विबाहु त्रिभुजका आधारका कोणहरू बराबर हुन्छन् ।

क्रियाकलाप 6

चित्रमा दिइए जस्तै गरी फरक फरक नाप भएका तीनओटा समद्विबाहु त्रिभुज खिच्नुहोस् ।



चित्र (क) चित्र (ख) चित्र (ग)

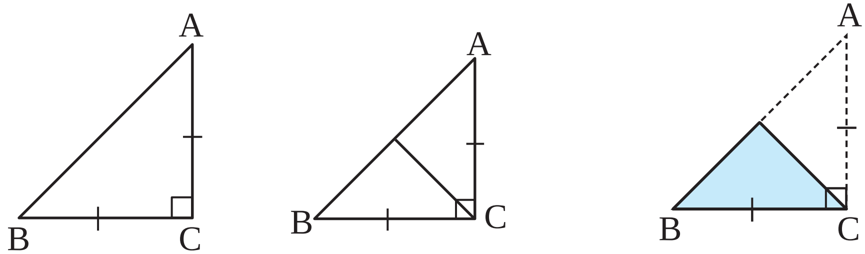
अब प्रोट्याक्टरको सहायताले माथिका प्रत्येक कोणहरूको नाप लिई तल दिइएको तालिकामा भर्नुहोस् र निष्कर्ष निकाल्नुहोस् :

चित्र न.	$\angle ABC$	$\angle ACB$	नतिजा
(क)			
(ख)			
(ग)			
निष्कर्ष :			

(घ) समकोणी समद्विबाहु त्रिभुजका आधारका कोणहरूको परीक्षण

क्रियाकलाप 7

एउटा कागजमा एउटा कोण समकोण भएको समद्विबाहु त्रिभुज खिच्नुहोस् र त्यसलाई कँचीको सहायताले काट्नुहोस् । अब उक्त त्रिभुजाकार कागजको टुक्रालाई चित्रमा देखाए जस्तै गरी पट्याउदै जानुहोस् र दिइएका प्रश्नका बारेमा छलफल गर्नुहोस् :



(क) चित्रमा $\angle ACB = 90°$ र $BC = AC$ भएको समकोणी समद्विबाहु त्रिभुज ABC को शीर्षबिन्दु A लाई B मा पर्ने गरी पट्याउँदा कोण B र कोण A को सम्बन्ध कस्तो हुन्छ ?

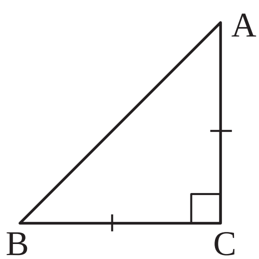
(ख) समकोणी समद्विबाहु त्रिभुजको बराबर भुजाले आधार रेखासँग बनाएका कोणहरूको सम्बन्ध के हुन्छ ? छलफल गरी निष्कर्ष प्रस्तुत गर्नुहोस् ।

(ग) समकोणी समद्विबाहु त्रिभुजका आधारका कोणहरू कति कति डिग्रीका हुन्छन् ? छलफल गरी निष्कर्ष प्रस्तुत गर्नुहोस् ।

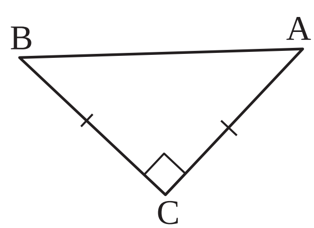
समकोणी समद्विबाहु त्रिभुजका प्रत्येक आधारका कोणहरू बराबर $45°$ हुन्छन् ।

क्रियाकलाप 8

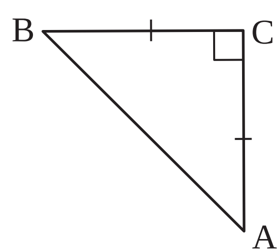
चित्रमा फरक फरक नाप भएका तीनओटा समकोणी समद्विबाहु त्रिभुजहरू दिइएका छन् ।



चित्र (क)



चित्र (ख)



चित्र (ग)

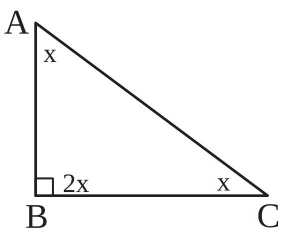
अब प्रोट्याक्टरको सहायताले माथिका प्रत्येक कोणहरूको नाप लिई तल दिइएको तालिकामा भर्नुहोस् र निष्कर्ष निकाल्नुहोस् :

चित्र न.	$\angle CAB$	$\angle CBA$	नतिजा
(क)			
(ख)			
(ग)			
निष्कर्ष :			

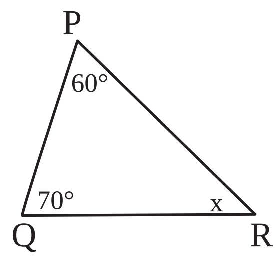
उदाहरण 1

दिइएको चित्रका आधारमा x को मान पत्ता लगाउनुहोस् :

(क)



(ख)



समाधान

यहाँ, (क) $\angle ABC + \angle BCA + \angle CAB = 180°$ [$\because$ त्रिभुजको भित्री कोणहरूको योगफल 180° हुने भएकाले ।

or, $2x + x + x = 180°$

or, $4x = 180°$

$\therefore x = 45°$

अत : x को मान 45° हुन्छ ।

अर्को तरिका,

दिइएको त्रिभुज ABC समकोणी समद्विबाहु त्रिभुज हो ।

त्यसैले $\angle ABC = 90°$ र $\angle BCA = \angle CAB = 45°$ हुन्छ ।

अत : x को मान 45° हुन्छ ।

(ख) $\angle PQR + \angle QRP + \angle RPQ = 180^o$ [∵ त्रिभुजका भित्री कोणहरूको योगफल 180° हुने भएकाले ।

or, $70^o + x + 60^o = 180^o$

or, $x + 130^o = 180^o$

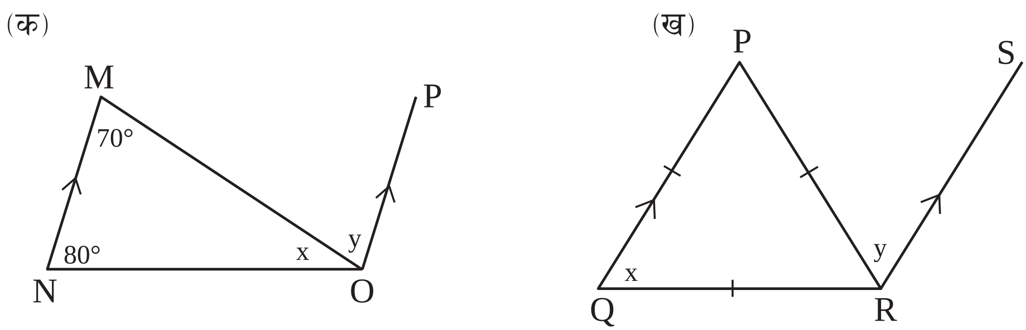
or, $x = 180^o - 130^o$

$\therefore x = 50^o$

अत : x को मान 50° हुन्छ ।

उदाहरण 2

दिइएको चित्रबाट x र y को मान पत्ता लगाउनुहोस् :



समाधान

यहाँ (क) $\angle MOP = \angle OMN$ [∵ NM//OPN, हुँदा छेदक OM ले काट्दा बनेका एकान्तर कोणहरू भएकाले ।

or, $y = 70^o$

त्यस्तै,

$\angle MNO + \angle NMO + \angle MON = 180^o$ [∵ त्रिभुजका भित्री कोणहरूको योगफल 180° हुने भएकाले ।

or, $80^o + 70^o + x = 180^o$

or, $150^o + x = 180^o$

or, $x = 180^o - 150^o$

$\therefore x = 30^o$

अत : x र y को मान क्रमशः 30° र 70° हुन्छ ।

(ख) दिइएको त्रिभुज PQR समबाहु त्रिभुज हो । समबाहु त्रिभुजको सबै कोणहरू बराबर हुन्छन् ।

त्यसैले $\angle PQR = \angle QRP = \angle RPQ = 60°$ हुन्छ ।

$\therefore x = 60°$

त्यस्तै,

$\angle QRP = \angle PRS$ [∵QP//RS, हुँदा छेदक PR ले काट्दा बनेका एकान्तर कोणहरू भएकाले ।

$\therefore y = 60°$

अत : x र y को मान क्रमश : 60° र 60° हुन्छ ।

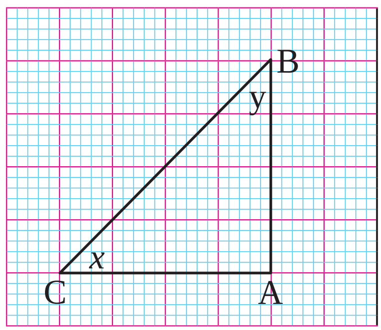
उदाहरण 3

सँगैको चित्रमा दिइएको त्रिभुज कस्तो किसिमको त्रिभुज हो ?

(क) कोण र भुजाको सङ्केतका आधारमा लेख्नुहोस् ।

(ख) x र y को मान पत्ता लगाउनुहोस् ।

(ग) x र y को मानका आधारमा कोणहरूको सम्बन्ध निकाल्नुहोस् ।



समाधान

(क) त्रिभुज ABC मा, AB = AC, र $\angle BAC = 90°$ छन् त्यसैले ΔBAC समकोणी समद्विबाहु त्रिभुज हो ।

(ख) $\angle ACB = x$ र $\angle ABC = y$ आधारका कोणहरू हुन् । त्रिभुजका तीन कोणको योग 180° हुने भएकाले,

$x + y + 90° = 180°$

$x + y = 90°$ … .. . (i)

फेरि समद्विबाहु त्रिभुजका आधारका कोणहरू बराबर हुने भएकाले $\angle ACB = \angle ABC$,
$x = y$ … … .. (ii)

(i) र (ii) बाट,

$x + x = 90°$
or, $2x = 90°$

अतः $x = 45°$

त्यसैले $y = 45°$

(ग) अतः $x = 45°$, $y = 45°$ भएकाले $\angle ACB = \angle ABC$ छन् ।

अभ्यास 14.1

1. दिइएका वाक्यहरू ठिक वा बेठिक के हुन्, छुट्याउनुहोस् । यदि बेठिक भए त्यसलाई ठिक बनाई लेख्नुहोस् :

(क) त्रिभुजका भित्री कोणहरूको योगफल $360°$ हुन्छ ।

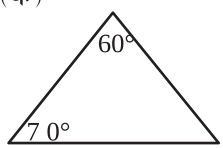
(ख) समबाहु त्रिभुजका सबै कोणहरू बराबर हुन्छन् ।

(ग) समद्विबाहु त्रिभुजका सबै कोणहरू बराबर हुन्छन् ।

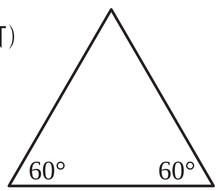
(घ) समकोणी समद्विबाहु त्रिभुजका आधार कोणहरू $60°$ को हुन्छन् ।

2. तलका त्रिभुजहरूको नाम लेखि कुन कुन त्रिभुज समद्विबाहु छन् । तिनीहरूका बराबर भुजाको नाम लेख्नुहोस् :

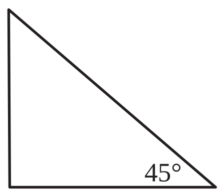
(क)



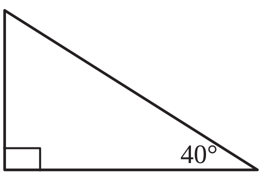
(ख)



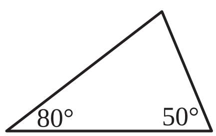
(ग)



(घ)

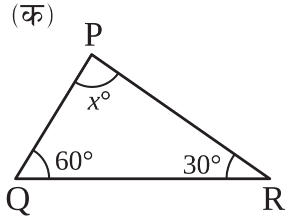


(ङ)

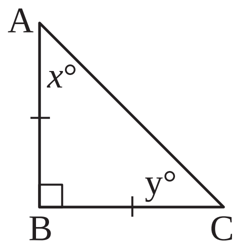


3. **तलका चित्रमा *x*, y, z को मान पत्ता लगाई बाँकी कोणहरूको मान पत्ता लगाउनुहोस् :**

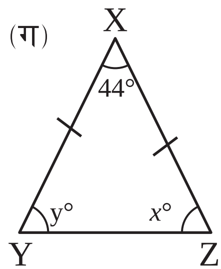
(क)



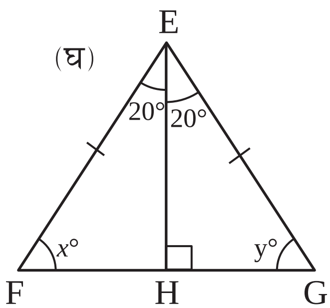
(ख)



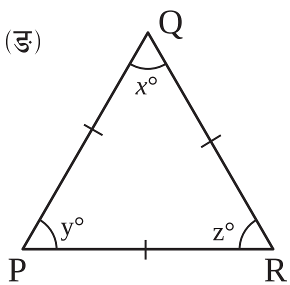
(ग)



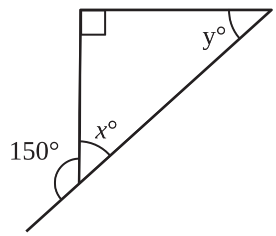
(घ)



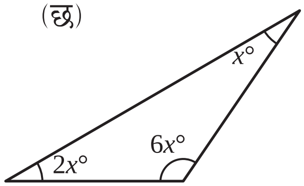
(ङ)



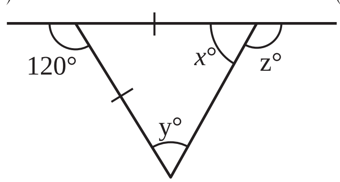
(च)



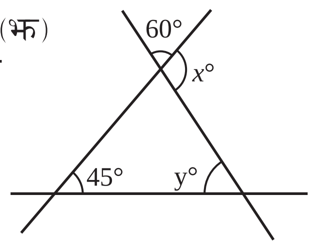
(छ)



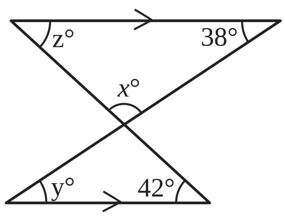
(ज)



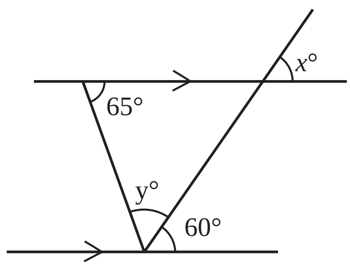
(झ)



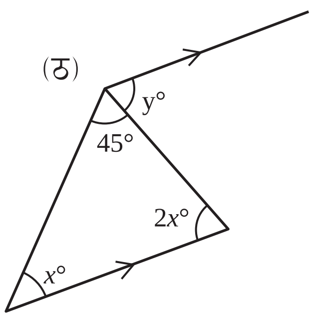
(ञ)



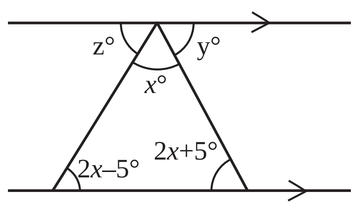
(ट)



(ठ)



(ड)



4. **(क) एउटा समद्विबाहु त्रिभुजको शीर्षकोण** 70^0 **हुन्छ भने आधार कोणहरू पत्ता लगाउनुहोस् ।**

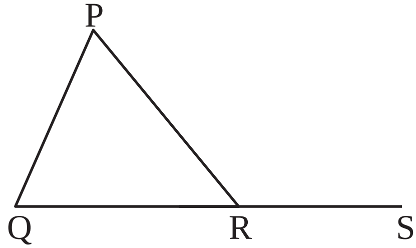
(ख) ΔABC मा $\angle BAC = 45°$, $\angle ABC = 2\angle BCA$ भए,

(अ) $\angle ABC$ र $\angle BCA$ को नाप पत्ता लगाउनुहोस् ।

(आ) ΔABC कस्तो प्रकारको त्रिभुज हो ? कारणसहित लेख्नुहोस् ।

(ग) यदि एउटा त्रिभुजका भित्री कोणहरू 2:3:4 को अनुपातमा छन् भने ती कोणहरू पत्ता लगाउनुहोस् ।

5. **(क) दिइएको चित्रमा** ΔPQR **को भुजा** QR **लाई** S **सम्म लम्बाइएको छ भने,**

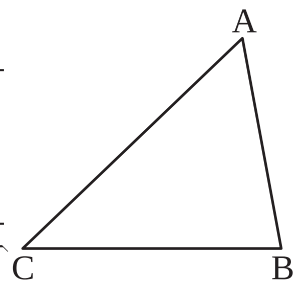


(अ) $\angle QPR$, $\angle PQR$ र $\angle PRS$ को नाप पत्ता लगाउनुहोस् ।

(आ) $\angle QPR + \angle PQR$ कति हुन्छ ?

(इ) $\angle QPR + \angle PQR$ र $\angle PRS$ को सम्बन्ध कस्तो हुन्छ, पत्ता लगाउनुहोस् ।

(ख) सँगैको चित्रमा ΔABC दिइएको छ ।

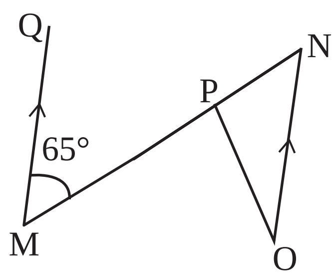


(अ) भुजाहरू AB, BC र AC को नाप पत्ता लगाउनुहोस् ।

(आ) AB + BC कति हुन्छ ?

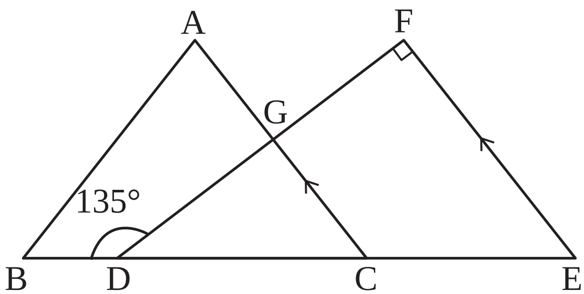
(इ) AB + BC र AC को सम्बन्ध कस्तो हुन्छ, पत्ता लगाउनुहोस् ।

6. (क) दिइएको चित्रमा MQ//ON, $\angle PNO:\angle NOP = 5:2$, $\angle QMN = 65°$ छ । $\angle NPO$ को मान पत्ता लगाउनुहोस् ।



(ख) दिइएको चित्रमा AC// FE, $\angle BDF = 135°$, DF ⊥ EF छ,

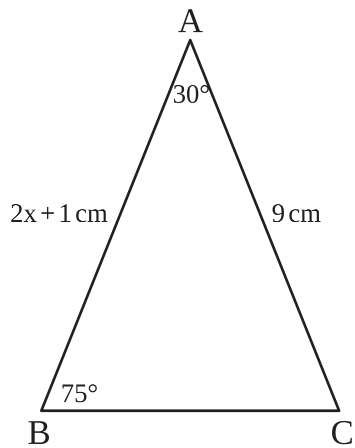
(अ) $\angle CDG$ को मान कति हुन्छ ?



(आ) भुजा GD र GC को सम्बन्ध लेख्नुहोस् ।

(इ) ΔCGD कस्तो त्रिभुज हो ?

(ग) दिइएको चित्रमा ΔABC मा,
$\angle BAC = 30°$,
$\angle ABC = 75°$, $AB = (2x + 1)$cm र
$AC = 9$cm छ भने x को मान पत्ता लगाउनुहोस् ।



उत्तर

1 र 2 शिक्षकलाई देखाउनुहोस् ।

3. (क) 90° (ख) $x = y = 45°$ (ग) $x = y = 68°$
(घ) $x = y = 70°$ (ङ) $x = y = z = 60°$ (च) $x = 30°, y = 60°$
(छ) $x = 20°$ (ज) $x = y = 60°, z = 120°$
(झ) $x = 120°, y = 75°$ (ञ) $x = 100°, y = 38°, z = 42°$
(ट) $x = 60°, y = 55°$ (ठ) $x = 45°, y = 90°$
(ड) $x = 36°, y = 77°, z = 67°$

4. (क) 55° (ख) (अ) 90° र 45° (आ) समकोणी समद्विबाहु त्रिभुज
(ग) 40°, 60°, 80°

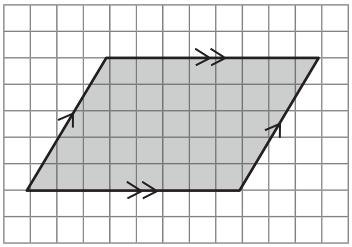
5. शिक्षकलाई देखाउनुहोस् ।

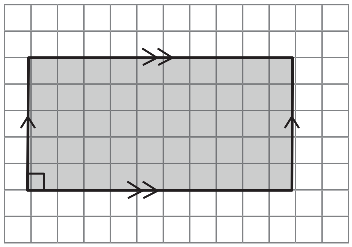
6. (क) 89° (ख) (अ) 45° (आ) बराबर हुन्छ ।
(इ) समकोणी समद्विबाहु ।
(ग) $x = 4$ cm

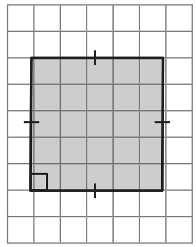
14.2 समबाहु चतुर्भुज, समलम्ब चतुर्भुज र चङ्गाका गुणहरूको पहिचान र परीक्षण (Identification and verification of the properties of Rhombus, Trapezium and Kite)

क्रियाकलाप 9

चित्रमा दिइएका चतुर्भुज अध्ययन गर्नुहोस् । जोडीमा छलफल गरी तिनीहरूको पहिचान गर्नुहोस् र विशेषताहरू तलको तालिकामा भर्नुहोस् :


चित्र (क)


चित्र (ख)


चित्र (ग)

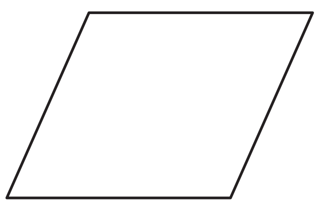
चर्तुभुज र तिनका विशेषता

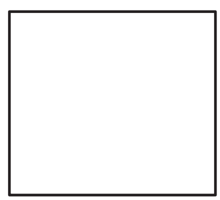
चित्र न.	चर्तुभुजको नाम	परिभाषा	विशेषता

(क) समबाहु चतुर्भुजका गुणहरूको पहिचान र परीक्षण (Identification and verification of the properties of Rhombus)

क्रियाकलाप 10

आठओटा बराबर नाप भएका सिन्का वा जुस पाइप लिनुहोस् र ती 4/4 ओटा सिन्काहरू वा जुस पाइपहरूबाट चित्रमा देखाइए जस्तै गरी विभिन्न आकारका बन्द आकृतिहरू बनाउनुहोस् । अब ती दुई आकृति बिचमा के के समानता र भिन्नता छन् ? समूहमा छलफल गरी निष्कर्ष कक्षामा प्रस्तुत गर्नुहोस् ।


चित्र (क)

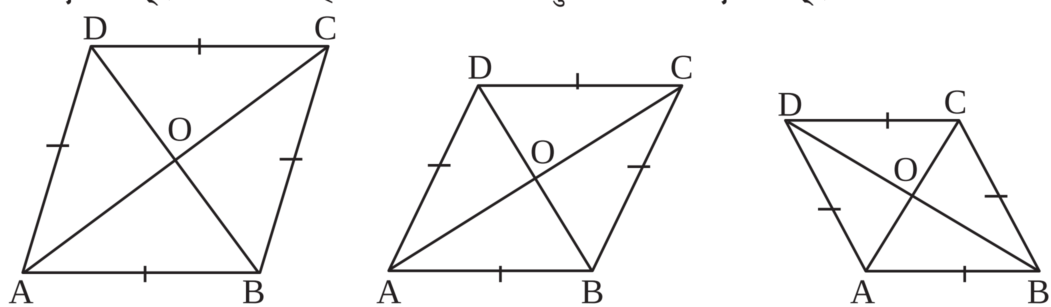

चित्र (ख)

यहाँ माथिका दुवै आकृतिका सबै भूजाहरू आपसमा बराबर छन् । जसमा चित्र (क) लाई समबाहु चतुर्भुज र चित्र (ख) लाई वर्ग भनिन्छ ।

क्र.स.	**समानताहरू**	**असमानताहरू**
(अ)	चारओटै भुजाहरू बराबर हुन्छन् ।	वर्गमा सबै कोणहरू 90° का हुन्छन् तर समबाहु चतुर्भुजमा हुदैनन् ।
(आ)	चारओटै कोणहरूको योगफल 360° हुन्छ ।	वर्गका सबै कोणहरू बराबर हुन्छन् तर समबाहु चतुर्भुजमा सम्मुख कोणहरू मात्र बराबर हुन्छन् ।
(इ)	विपरीत भुजाहरू समानान्तर हुन्छन् ।	वर्गका विकर्णहरूको लम्बाइ बराबर हुन्छन् तर समबाहु चतुर्भुजमा हुँदैनन् ।

क्रियाकलाप 11

चित्रमा फरक फरक नाप भएका तीनओटा समबाहु चतुर्भुज दिइएको छ जसमा विकर्णहरू खिचिएका छन् । साथै विकर्णहरू AC र BD बिन्दु O मा काटिएका छन् ।



चित्र (क) चित्र (ख) चित्र (ग)

अब AO, CO, BO, DO, ∠AOB र ∠BOC नाप लिनुहोस् । तल दिइएको तालिकामा भर्नुहोस् र निष्कर्ष निकाल्नुहोस् :

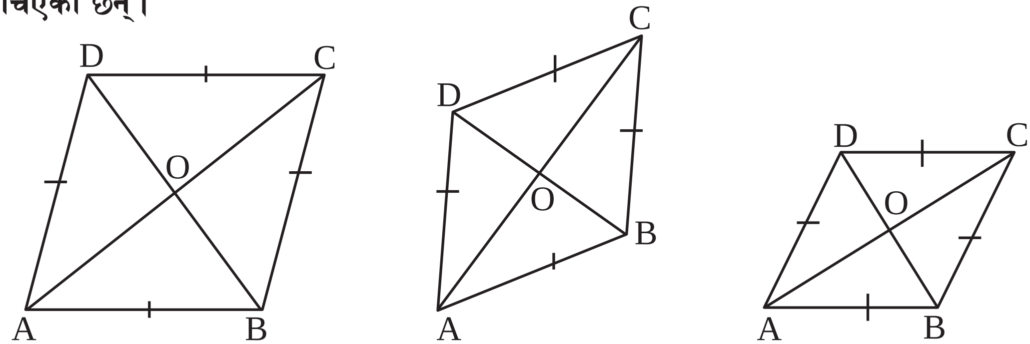
चित्र न.	**AO**	**CO**	**BO**	**DO**	**∠AOB**	**∠BOC**	**नतिजा**
(क)							
(ख)							
(ग)							
निष्कर्ष :							

के तपाईंले निकाल्नु भएको निष्कर्ष र तलको कथन एउटै छ ?

समबाहु चतुर्भुजका विकर्णहरू परस्पर समकोण हुने गरी समद्विभाजित हुन्छन् ।

क्रियाकलाप 12

चित्रमा फरक फरक नाप भएका तीनओटा समबाहु चतुर्भुज दिइएका छन् जसमा विकर्णहरू खिचिएका छन् ।



चित्र (क) चित्र (ख) चित्र (ग)

शीर्षकोणहरूलाई विकर्णले काट्दा बनेका कोणहरूको नाप प्रोट्याक्टरको प्रयोगबाट नापी तल दिइएको तालिकामा भर्नुहोस् र निष्कर्ष निकाल्नुहोस् :

चित्र न.	∠ADB	∠BDC	∠ACD	∠ACB	∠ABD	∠CBD	∠BAC	∠CAD	नतिजा
(क)									
(ख)									
(ग)									
निष्कर्ष :									

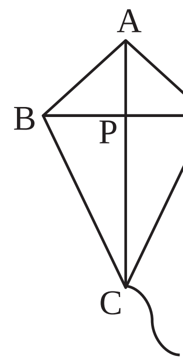
के तपाईंले निकाल्नु भएको निष्कर्ष र तलको कथन एउटै छ ?

समबाहु चतुर्भुजका प्रत्येक विकर्णले शीर्षकोणलाई आधा गर्दछ ।

(ख) चङ्गाका गुणको पहिचान र परीक्षण (Identification and verification of the properties of Kite)

क्रियाकलाप 13

सँगैको चित्रमा दिइएको जस्तो चङ्गा कसरी निर्माण गर्ने होला, समूहमा छलफल गरी कागजको प्रयोगबाट चङ्गा बनाउनुहोस् । अब तपाईँले बनाएको जस्तै चङ्गाको चित्र कापीमा कोर्नुहोस् र निम्नलिखित प्रश्नमा छलफल गरी निष्कर्ष कक्षामा प्रस्तुत गर्नुहोस् :



(अ) चङ्गा ABCD का कुन कुन भुजाहरू बराबर छन् ?

(आ) कतिओटा विकर्णहरू छन् ?

(इ) के ती विकर्णहरूको लम्बाइ बराबर छ ?

(ई) लामो र छोटो विकर्णका नाम लेख्नुहोस् ।

(उ) के BP र PD बराबर छन् ?

(ऊ) ∠APB र ∠APD का नापहरू कति कति हुन्छन् ? प्रोट्याक्टरको प्रयोग गरी नाप्नुहोस् ।

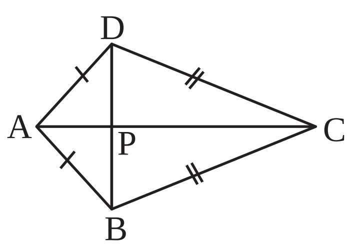
(ए) चङ्गा ABCD मा कतिओटा समद्विबाहु त्रिभुजहरू छन् ? तिनीहरू कुन कुन हुन् ?

यहाँ चङ्गा ABCD मा दुई जोडी आसन्न भुजाहरू AB = AD र BC = DC छन् । साथै लामो विकर्ण AC र छोटो विकर्ण BD छन् । साथै BP = PD र ∠APB = ∠APD = 90° पनि छन् ।

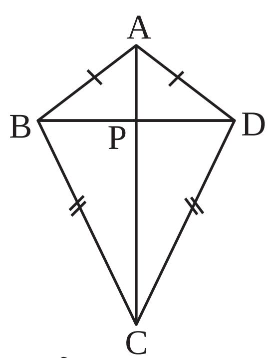
दुई जोडी आसन्न भुजाहरू बराबर भएको चतुर्भुज चङ्गा हो । यसको लामो विकर्णले छोटो विकर्णलाई समकोण हुने गरी समद्विभाजन गर्दछ । बराबर नहुने भुजाहरूबिच बनेका कोणहरू बराबर हुन्छन् ।

क्रियाकलाप 14

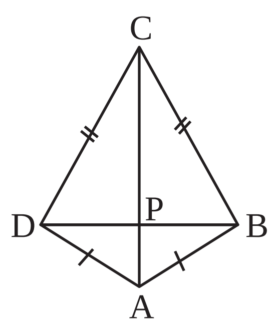
चित्रमा देखाइए जस्तै गरी फरक फरक नाप भएका तीनओटा चङ्गा बनाउनुहोस् र विकर्णहरू खिच्नुहोस् ।



चित्र (क)



चित्र (ख)



चित्र (ग)

BP, DP, ∠APB र ∠APD का नापहरू लिई तल दिइएका तालिकामा भर्नुहोस् र निष्कर्ष निकाल्नुहोस् :

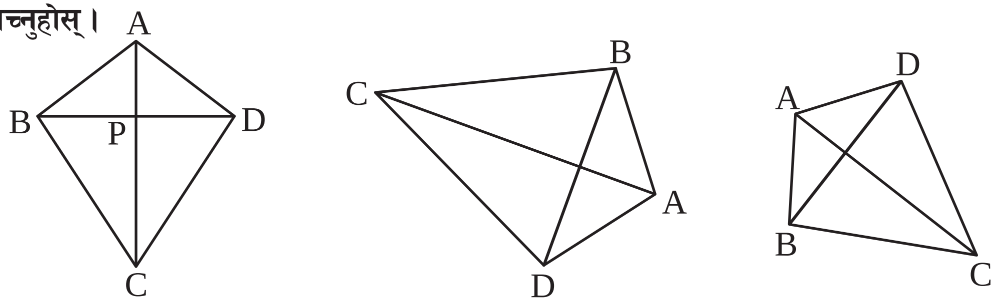
चित्र न.	BP	DP	∠APB	∠APD	नतिजा
(क)					
(ख)					
(ग)					
निष्कर्ष :					

के तपाईंले निकाल्नु भएको निष्कर्ष र तलको कथन एउटै छ ?

चङ्गाका विकर्णहरूमध्ये लामो विकर्णले छोटो विकर्णलाई समकोण हुने गरी समद्विभाजन गर्छ ।

क्रियाकलाप 15

चित्रमा देखाइए जस्तै गरी फरक फरक नाप भएका तीनओटा चङ्गा बनाउनुहोस् र विकर्णहरू खिच्नुहोस् ।



चित्र (क) चित्र (ख) चित्र (ग)

AB, AD, BC र CD का नापहरू लिई तल दिइएका तालिकामा भर्नुहोस् र निष्कर्ष निकाल्नुहोस् ।

चित्र न.	ΔABD मा		ΔBCD मा		नतिजा
	AB	AD	BC	CD	
(क)					
(ख)					
(ग)					
निष्कर्ष :					

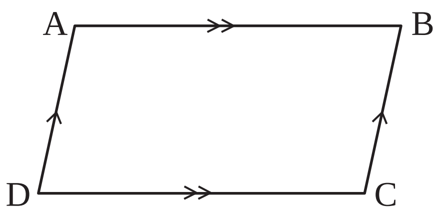
के तपाईंले निकाल्नु भएको निष्कर्ष र तलको कथन एउटै छ ?

चङ्गामा छोटो विकर्णले उक्त चङ्गालाई दुई समद्विबाहु त्रिभुजमा विभाजन गर्छ ।

(ग) समलम्ब चतुर्भुजका गुणहरूको पहिचान र परीक्षण (Identification and verification of the properties of Trapezium)

क्रियाकलाप 16

उपयुक्त समूहमा बसी निम्नलिखित प्रश्नहरूमा छलफल गर्नुहोस् :



(क) सँगै चित्रमा दिइएको आकृतिलाई के भनिन्छ ?

(ख) भुजा AD र BC तथा AB र DC कस्ता भुजाहरू हुन् ? के भुजा AD र BC तथा AB र DC समानान्तर छन् ?

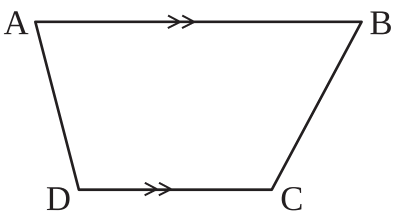
(ग) के सम्मुख कोणहरू ∠BAD र ∠BCD तथा ∠ADC र ∠ABC बराबर छन् ?

(घ) यदि भुजा AD र BC वा AB र DC मध्ये कुनै एक जोडी भुजालाई मात्रै समानान्तर बनाउने हो भने कस्तो आकृति बन्छ होला ?

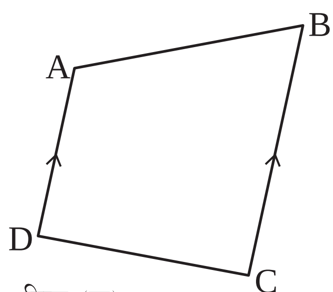
(ङ) के नयाँ बनेको आकृतिको सम्मुख भुजाहरू तथा कोणहरू पनि आपसमा बराबर हुन्छन् ?

यहाँ,

माथि दिइएको समानान्तर चतुर्भुजको कुनै एक जोडी भूजाहरूलाई मात्रै समानान्तर बन्ने गरी नयाँ आकृति बनाउँदा सँगैको चित्रमा देखाएको जस्तो चतुर्भुज बन्छ । यस्तो चतुर्भुजलाई समलम्ब चतुर्भुज भनिन्छ ।



चित्र (क)

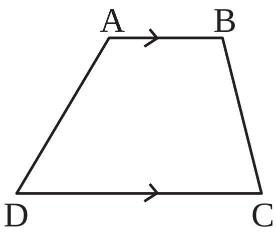


चित्र (ख)

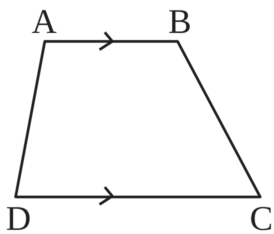
एक जोडी सम्मुख भुजाहरू मात्र समानान्तर भएको चतुर्भुजलाई समलम्ब चतुर्भुज (Trapezium) भनिन्छ ।

क्रियाकलाप 17

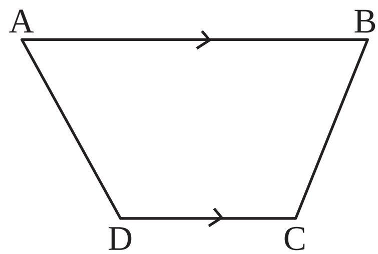
चित्रमा दिइए जस्तै गरी फरक फरक नाप भएका तीनओटा समलम्ब चतुर्भुज दिइएका छन् ।



चित्र (क)



चित्र (ख)



चित्र (ग)

सम्मुख भुजाहरू समानान्तर भए नभएको यकिन गर्न प्रोट्याक्टरको सहायताले क्रमागत भित्रीकोणहरू नापेर तलको तालिकामा भर्नुहोस् :

चित्र न.	$\angle DAB + \angle ADC$	$\angle ABC + \angle BCD$	नतिजा
(क)			
(ख)			
(ग)			

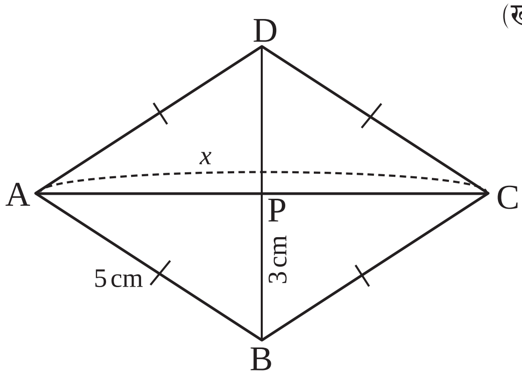
के तपाईंले निकाल्नु भएको निष्कर्ष र तलको कथन एउटै छ ?

समानान्तर नभएको भुजामा बनेका क्रमागत भित्रीकोणको योग 180° हुन्छ । त्यसैले समलम्ब चर्तुभुजका एकजोडी सम्मुख भुजाहरू समानान्तर हुन्छन् ।

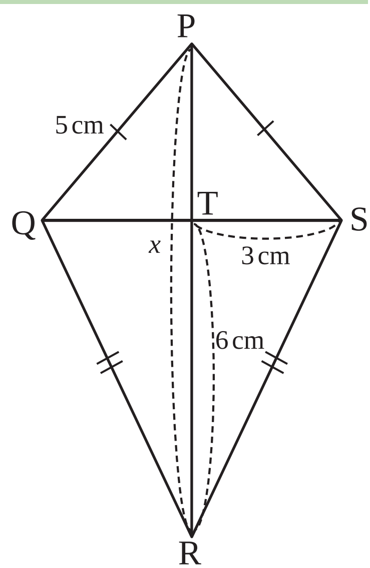
उदाहरण 1

दिइएका चतुर्भुजमा x को मान पत्ता लगाउनुहोस् :

(क)



(ख)



समाधान

(क) दिइएको चतुर्भुज ABCD एउटा समबाहु चतुर्भुज हो । जसमा AB = 5 cm, BP = 3 cm र AC = ?

यहाँ $\angle APB = \angle BPC = 90°$ हुन्छ । [∵ समबाहु चतुर्भुजका विकर्णहरू परस्परमा समकोण हुने गरी समद्विभाजित हुने भएकाले]

अब समकोण ΔAPB मा,

$AB^2 = AP^2 + BP^2$ [∵ पाइथागोरस साध्य $h^2 = p^2 + b^2$ बाट]

or, $5^2 = AP^2 + 3^2$

or, $25 = AP^2 + 9$

or, $AP^2 = 25 - 9$

∵ AP = 4 cm

अत : $AC = x = 2 \times 4 = 8$ cm

(ख) दिइएको चतुर्भुज PQRS एउटा चङ्गा हो ।

जसमा PQ = 5 cm, ST = 3 cm र TR =6 cm र PR = ?

यहाँ $\angle PTQ = 90°$ र QT = 3 cm हुन्छ । [∵ चङ्गामा लामो विकर्णले छोटो विकर्णलाई समकोण हुने गरी समद्विभाजित गर्ने भएकाले]

अब समकोण ΔPTQ मा,

$PQ^2 = PT^2 + QT^2$ [∵ पाइथागोरस साध्य $h^2 = p^2 + b^2$ बाट]

or, $5^2 = PT^2 + 3^2$

or, $25 = PT^2 + 9$

or, $PT^2 = 25 - 9$

∴ PT = 4 cm

अत : $PR = x = PT + RT = 4 + 6 = 10$ cm

अभ्यास 14.2

1. **दिइएका वाक्यहरू ठिक वा बेठिक के हुन्, छुट्याउनुहोस् । यदि बेठिक भए त्यसलाई ठिक बनाई लेख्नुहोस् :**

(क) सबै समबाहु चतुर्भुजहरू वर्ग हुन्छन् ।

(ख) समबाहु चतुर्भुजका सबै कोणहरू बराबर हुन्छन् ।

(ग) चङ्गामा छोटो विकर्णले लामो विकर्णलाई समद्विभाजन गर्छ ।

(घ) समबाहु चतुर्भुजका विकर्णहरू परस्पर समद्विभाजित हुन्छन् ।

(ङ) समबाहु चतुर्भुजका विकर्णहरूबिचको कोण 90° हुन्छ ।

(च) समलम्ब चतुर्भुजमा सम्मुख भुजाहरू समानान्तर हुन्छन् ।

(छ) सबै समलम्ब चतुर्भुजहरू समानान्तर चतुर्भुज हुन्छन् ।

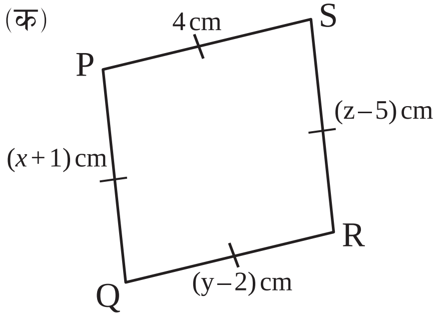
2. **तल तालिकामा चतुर्भुजका भुजा, कोण र समानान्तर रेखासम्बन्धी गुणहरू दिइएको छ । मिल्ने गुण भएमा सम्बन्धित चतुर्भुजको नामको तल ठिक र नमिल्ने गुण भएमा सम्बन्धित चतुर्भुजको नामको तल बेठिक चिह्न लगाउनुहोस् ।**

गुणहरू	चतुर्भुजहरू				
	समानान्तर चतुर्भुज	समबाहु चतुर्भुज	समलम्ब चतुर्भुज	वर्ग	आयत
सबै कोणहरू बराबर हुन्छन् ।					
सबै कोणहरू समकोण हुन्छन् ।					
जोडा कोणहरू बराबर हुन्छन् ।					
सबै भुजाहरू बराबर हुन्छन् ।					
जोडा विपरीत भुजाहरू बराबर हुन्छन् ।					
एक जोडा विपरीत भुजाहरू समानान्तर हुन्छन्					
दुई जोडा विपरीत भुजाहरू समानान्तर हुन्छन् ।					

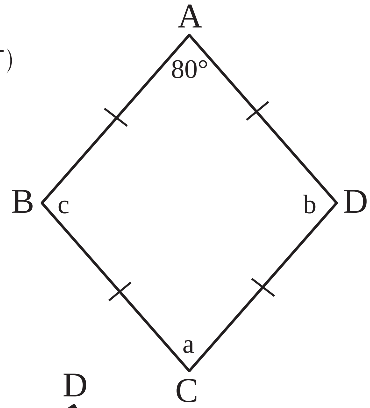
3. **प्रश्न न. 2 मा दिइएको चतुर्भुजका भुजा, कोण र समानान्तर रेखासम्बन्धी गुणहरूका आधारमा ती चतुर्भुजहरूको सम्बन्धलाई चित्रमा प्रस्तुत गर्नुहोस् ।**

4. **दिइएका चतुर्भुजहरूमा a, b, c, *x*, y र z का मानहरू पत्ता लगाउनुहोस् :**

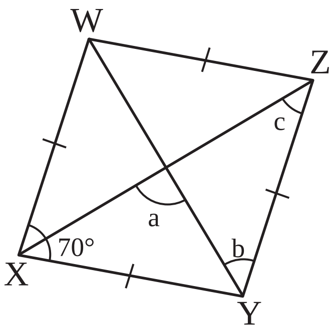
(क)



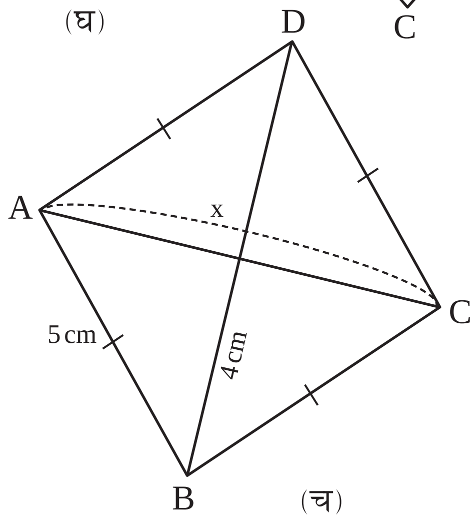
(ख)



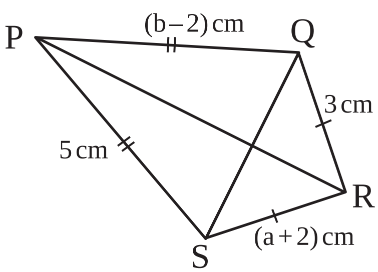
(ग)



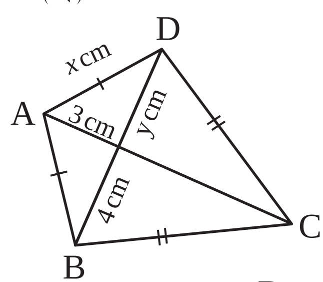
(घ)



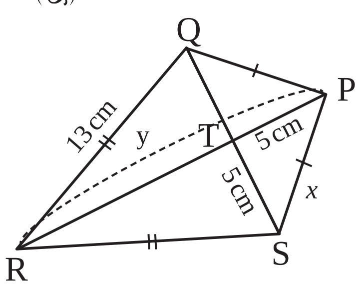
(ङ)



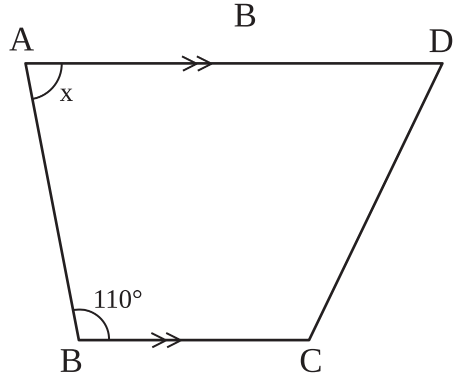
(च)



(छ)

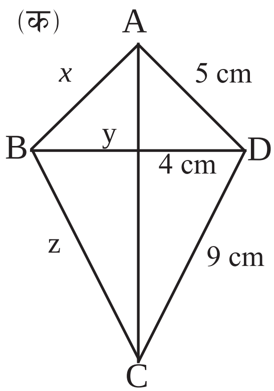


(ज)

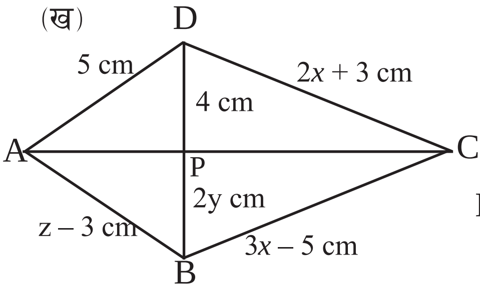


5. **तलका चङ्गाकार आकारमा x, y, z को मान निकाल्नुहोस् :**

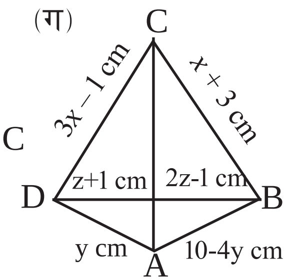
(क)



(ख)

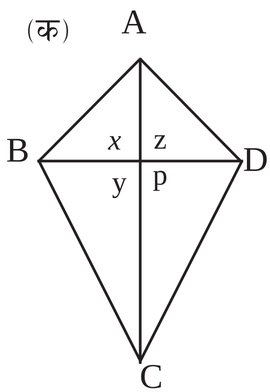


(ग)

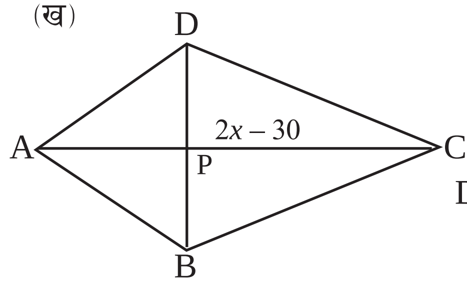


6. **तलका चङ्गाकार आकारमा x, y, z को मान निकाल्नुहोस् :**

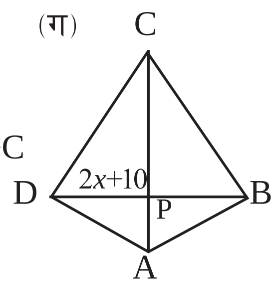
(क)



(ख)



(ग)



उत्तर

1 देखि **3** सम्म शिक्षकलाई देखाउनुहोस् ।

4. (क) $x = 3$, y = 6, z = 9 (ख) a = 80º b = c = 100°

(ग) a = 90º, b = 55°, c = 35º (घ) $x = 6$ cm

(ङ) a = 1, b = 7 (च) $x = 5$ cm y = 4 cm

(छ) $x = 5\sqrt{2}$ cm, y = 17 cm (ज) $x = 70º$

5. (क) $x = 5$ cm, y = 4 cm, z = 9 cm (ख) $x = 8$ cm, y = 2 cm, z = 8 cm

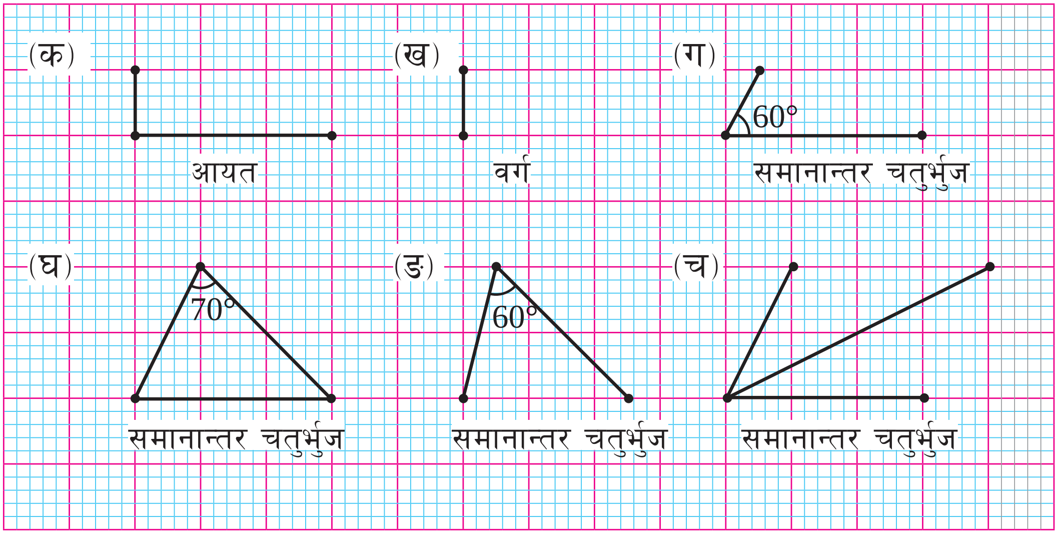
(ग) $x = 2$ cm, y = 2 cm, z = 2 cm

6. (क) x = y = z = p = 90º (ख) $x = 60º$ (ग) $x = 40º$

14.3 रचना

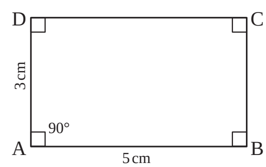
क्रियाकलाप 18

दिइएको चित्रका नामअनुसार आकृति पूरा गर्नुहोस् :



14.3.1 आयतको रचना (दुई आसन्न भुजाहरू दिइएको अवस्थामा)

क्रियाकलाप 19



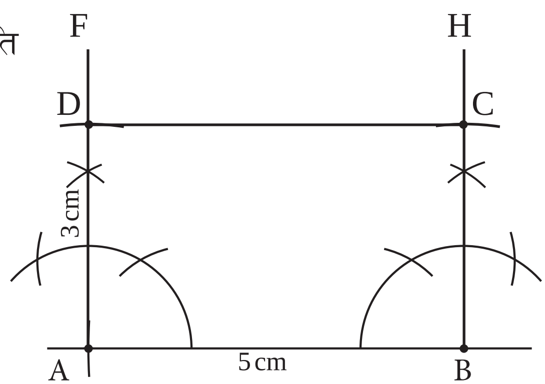
निम्नलिखित प्रश्नहरूमा छलफल गर्नुहोस् :

(क) आयत भनेको के हो ?

(ख) आयतका प्रत्येक कोणहरू कति कति हुन्छन् ?

(ग) आयतका अनासन्न भुजाहरूको सम्बन्ध कस्तो हुन्छ ?

अब आसन्न भुजाहरू 5 cm र 3 cm हुने गरी एउटा आयतको रचना गर्नुहोस् ।



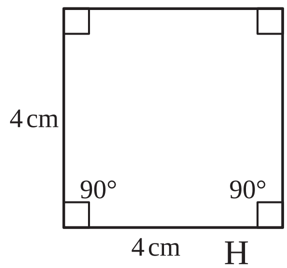
रचनाका चरणहरू यसप्रकारका छन् :

1. खेस्रा चित्र तयार गर्नुहोस् ।
2. आधार रेखामा पाँच से.मि. हुने गरी AB ले जनाउनुहोस् ।
3. A मा कम्पासको सहायताले 90° को कोण खिच्नुहोस् । जस अनुसार कोण FAB को नाप 90° छ ।
4. 3 cm अर्धव्यास लिएर A बाट रेखा AF लाई काट्नुहोस् । काटिएको बिन्दुलाई D ले जनाउनुहोस् ।
5. B बाट कम्पासको सहायताले 90° को कोण खिच्नुहोस् । जसअनुसार कोण HBA को नाप 90° छ ।
6. 3 cm अर्धव्यास लिएर B बाट रेखा BH लाई काट्नुहोस् । काटिएको बिन्दुलाई C ले जनाउनुहोस् ।
7. C र D जोड्नुहोस् ।

अब आयात ABCD को रचना भयो ।

14.3.2 वर्गको रचना (एउटा भुजा दिइएको अवस्थामा)

क्रियाकलाप 20



निम्नलिखित प्रश्नमा छलफल गर्नुहोस् :

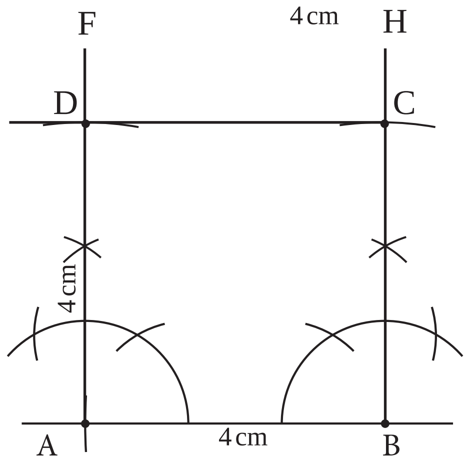
(क) वर्ग भनेको के हो ?

(ख) वर्ग प्रत्येक कोणहरू कति कति हुन्छन् ?

(ग) वर्गका सबै भुजाहरूको सम्बन्ध कस्तो हुन्छ ?

अब,

एउटा भुजा 4 cm हुने गरी एउटा वर्गको रचना गर्नुहोस् ।



रचनाका चरणहरू यसप्रकारका छन् :

1. खेस्रा चित्र तयार गर्नुहोस् ।
2. आधार रेखामा 4 cm हुने गरी AB ले जनाउनुहोस् ।
3. A बाट कम्पासको सहायताले 90° को कोण खिच्नुहोस् । जसअनुसार कोण FAB को नाप 90° छ ।
4. 4 cm अर्धव्यास लिएर A बाट रेखा AF लाई काट्नुहोस् । काटिएको बिन्दुलाई D ले जनाउनुहोस् ।

5. B बाट कम्पासको सहायताले 90° को कोण खिच्नुहोस् । जसअनुसार कोण HBA को नाप 90° छ ।
6. 4 cm अर्धव्यास लिएर B बाट रेखा BH लाई काट्नुहोस् । काटिएको बिन्दुलाई C ले जनाउनुहोस् ।
7. C र D जोड्नुहोस् ।

अब वर्ग ABCD को रचना भयो ।

14.3.3 समानान्तर चतुर्भुजको रचना

क्रियाकलाप 21

निम्नलिखित प्रश्नहरूमा छलफल गर्नुहोस् :

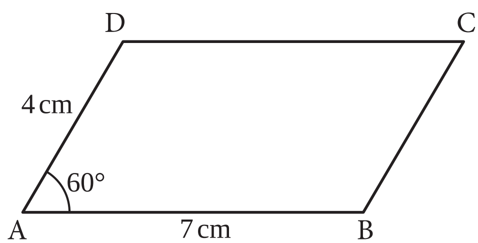
(क) समानान्तर चतुर्भुज भनेको के हो ?

(ख) समानान्तर चतुर्भुजका विशेषता के के हुन् ?

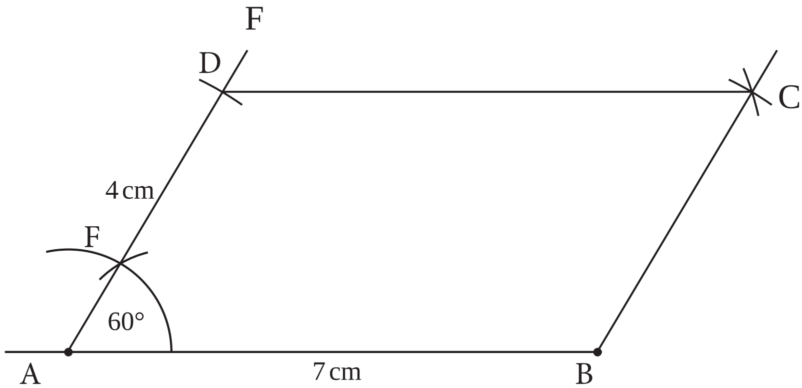
अब निम्नलिखित अवस्थाहरूमा समानान्तर चतुर्भुजको रचना कसरी गर्ने होला छलफल गर्नुहोस् ।

(क) आसन्न भुजाहरूको नाप र बिचको कोणको नाप दिइएको अवस्थामा समानान्तर चतुर्भुजको रचना

7 cm र 4 cm आसन्न भुजाहरू र तिनीहरूको बिचको कोण 60° हुने गरी समानान्तर चतुर्भुजको रचना गर्नुहोस् । निम्नलिखित चरणहरू अपनाएर स.च.को रचना गर्न सकिन्छ ।



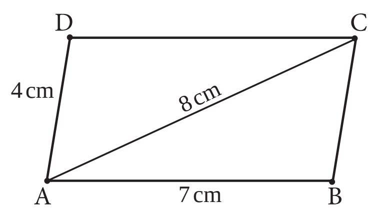
1. खेस्रा चित्र तयार गर्नुहोस् ।
2. आधार रेखामा 7 cm हुने गरी AB ले जनाउनुहोस् ।
3. A बाट कम्पासको सहायताले 60° को कोण खिच्नुहोस् । जसअनुसार कोण FAB को नाप 60° छ ।



4. 4 cm अर्धव्यास लिएर A बाट रेखा AF लाई काट्नुहोस् । काटिएको बिन्दुलाई D ले जनाउनुहोस् ।
5. B बाट कम्पासको सहायताले AD बराबरको चापले B बाट माथि र AB बराबरको चापले D बाट B तर्फ काट्नुहोस् । काटिएको बिन्दुलाई C ले जाउनुहोस् ।
6. C र D तथा B र C जोड्नुहोस् ।
7. अब स.च. ABCD को रचना भयो ।

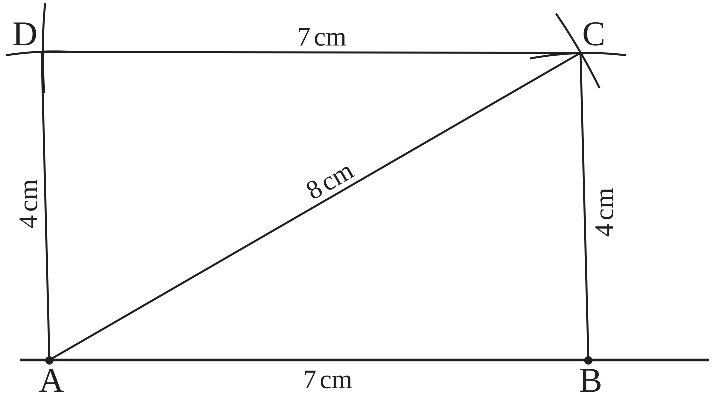
(ख) आसन्न भुजाहरूको नाप र एउटा विकर्णको नाप दिइएको अवस्थामा समानान्तर चतुर्भुजको रचना

7 cm र 4 cm आसन्न भुजाहरू र एउटा विकर्णको लम्बाइ 8 से.मि. हुने गरी समानान्तर चतुर्भुजको रचना गर्नुहोस् ।



निम्नलिखित चरणहरू अपनाएर स.च.को रचना गर्न सकिन्छ ।

1. खेस्रा चित्र तयार गर्नुहोस् ।
2. आधार रेखामा 7 cm हुने गरी AB ले जनाउनुहोस् ।
3. बिन्दु A बाट 8 cm र बिन्दु B बाट 4 cm को अर्धव्यास लिएर चापहरू खिच्नुहोस् ।
4. A र C तथा B र C जोड्नुहोस् । यसरी त्रिभुज ABC बन्यो ।



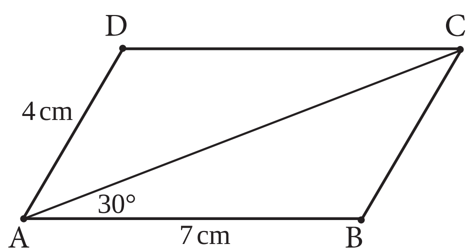
5. बिन्दु A बाट 4 cm र बिन्दु C बाट 7 cm को अर्धव्यास लिएर चापहरू खिच्नुहोस् । काटिएको बिन्दुलाई D ले जनाउनुहोस् ।
6. A र D तथा C र D जोड्नुहोस् ।
7. अब स.च. ABCD को रचना भयो ।

(ग) आसन्न भुजाहरूको नाप र विकर्ण तथा एउटा भुजाबिचको कोणको नाप दिइएको अवस्थामा समानान्तर चतुर्भुज (स.च) को रचना

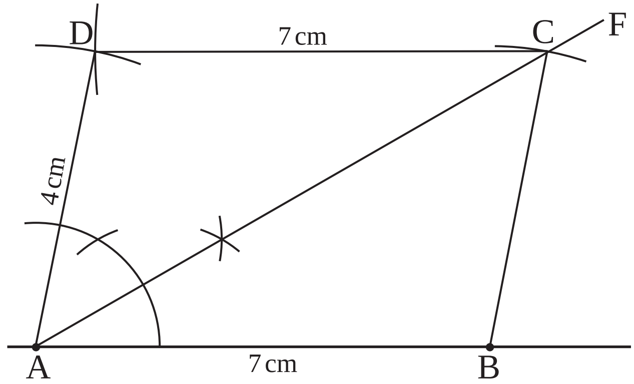
स.च. ABCD रचना गर्नुहोस् जसमा AB = 7 cm र AD = 4 cm आसन्न भुजाहरू र विकर्णले भुजा AB सँग 30° को कोण बनाउँछ ।

निम्नलिखित चरणहरू अपनाएर स.च.को रचना गर्न सकिन्छ ।

1. खेस्रा चित्र तयार गर्नुहोस् ।
2. आधार रेखामा 7 cm हुने गरी AB ले जनाउनुहोस् ।
3. A मा कम्पासको सहायताले 30° को कोण खिच्नुहोस् । जसअनुसार ∠FAB =30° भयो ।



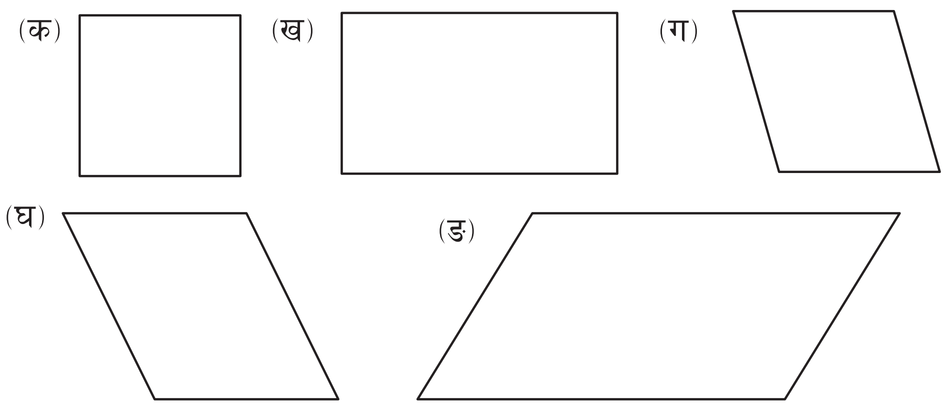
4. 4 cm अर्धव्यास लिएर B बाट रेखा AF लाई काट्नुहोस् । काटिएको बिन्दुलाई C ले जनाउनुहोस् ।
5. B र C जोड्नुहोस् । त्रिभुज ABC बन्यो ।



6. बिन्दु A बाट 4 cm र बिन्दु C बाट 7 cm को अर्धव्यास लिएर चापहरू खिच्नुहोस् । काटिएको बिन्दुलाई D ले जनाउनुहोस् ।
7. A र D तथा C र D जोड्नुहोस् ।
8. अब स.च. ABCD को रचना भयो ।

अभ्यास 14.3

1. **तलका चित्रमा दिइएका कोण र भुजाहरूको नापसँग बराबर हुने गरी चित्रहरू बनाउनुहोस् :**



2. तलका नापका आधारमा आयतको रचना गर्नुहोस् :

(क) आयत ABCD मा AB = 7 cm, AD = 4 cm

(ख) लम्बाइ 6 cm र चौडाइ 4 cm

(ग) आसन्न भुजाहरूको नाप 8 cm. र 5 cm

(घ) लम्बाइ .... र चौडाइ ....(आफैं राख्नुहोस् ।)

3. तलका नापका आधारमा आयतको रचना गर्नुहोस् :

(क) आयत ABCD मा AB = 7 cm, AD = 4 cm

(ख) लम्बाइ 6 cm र चौडाइ 4 cm

(ग) आसन्न भुजाहरूको नाप 8 cm र 5 cm

4. तलका नापका आधारमा वर्गको रचना गर्नुहोस् :

(क) एउटा भुजाको नाप 4 cm

(ख) लम्बाइ 4.5 cm

(ग) लम्बाइ .... (आफैँ राख्नुहोस् ।)

5. निम्नलिखित अवस्थाका समानान्तर चतुर्भुजको रचना गर्नुहोस् :

(क) आसन्न भुजाहरू 3 cm र 5 cm आसन्न भुजाहरूका बिचको कोण 45°

(ख) आसन्न भुजाहरू 4 cm. र 6 cm. र विकर्ण 7 cm

(ग) एउटा भुजा 4 cm, विकर्ण 8 cm र विकर्णले 4 cm नाप भएको भुजासँग बनाएको कोण 60°

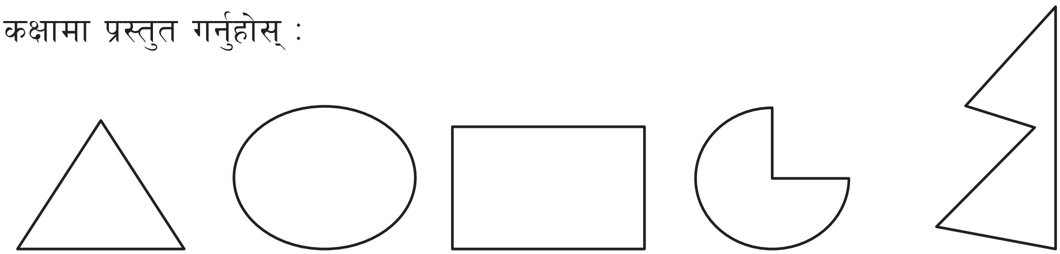
उत्तर

शिक्षकलाई देखाउनुहोस् ।

14.4 बहुभुज (Polygon)

क्रियाकलाप 22

दिइएका चित्रको अवलोकन गरी आकृतिको नाम के हो ? कतिओटा भुजाहरूले बनेका छन् ? बन्द आकृति हुन् वा होइनन् ? जस्ता प्रश्नहरूमा छलफल गर्नुहोस् र प्राप्त नतिजालाई कक्षामा प्रस्तुत गर्नुहोस् :

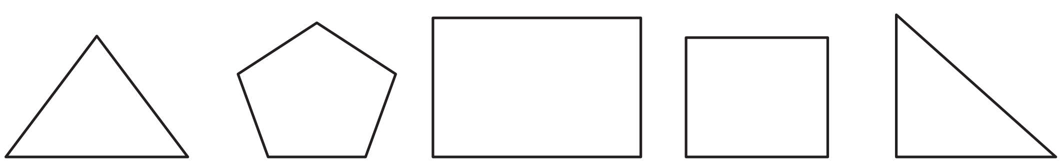


तीन वा तीनभन्दा बढी भुजाले बनेका ज्यामितीय बन्द आकृतिलाई बहुभुज भनिन्छ । तीनओटा भुजाले बनेको बहुभुजलाई त्रिभुज भनिन्छ । त्यस्तै गरी चतुर्भुज, पञ्चभुज, षड्भुज आदि क्रमशः चारओटा, पाँचओटा, छओटा भुजाहरूबाट बनेका बहुभुजहरू हुन् ।

14.4.1 नियमित बहुभुज (Regular Polygon)

क्रियाकलाप 23

रुलर तथा प्रोट्याक्टरको प्रयोग गरी दिइएका बहुभजुहरूका भुजाहरू तथा कोणहरूको नाप लिनुहोस् र जोडीमा निम्नलिखित प्रश्नहरूमा छलफल गर्नुहोस् :



चित्र (क) चित्र (ख) चित्र (ग) चित्र (घ) चित्र (ङ)

(क) के सबै चित्रमा भएका बहुभुजका भुजाहरू बराबर छन् ?

(ख) के सबै चित्रमा भएका बहुभुजका कोणहरू बराबर छन् ?

(ग) कोणहरू र भुजाहरू बराबर भएका बहुभुजहरू कुन कुन हुन् ?

(घ) कोणहरू र भुजाहरू बराबर नभएका बहुभुजहरू कुन कुन हुन् ?

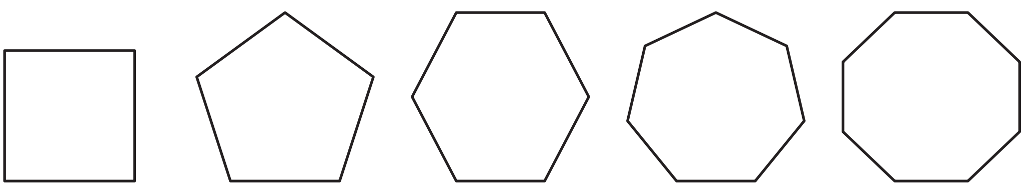
माथि दिइएको चित्र न. (क), (ख) र (ग) मा भएका बहुभुजका सबै भुजाहरू र कोणहरू बराबर छन् भने चित्र न. (ग) मा भएका बहुभुजका सबै कोणहरू बराबर भए तापनि सम्मुख भुजाहरू मात्रै बराबर छन् । त्यस्तै चित्र न. (ङ) को आधारका कोणहरू मात्रै बराबर छन् । त्यसैले चित्र न. (क), (ख) र (घ) मा भएका बहुभुजहरू नियमित बहुभुजहरू हुन् भने चित्र न. (ग) र (ङ) मा नियमित बहुभुज होइनन् ।

सबै भुजाहरू र भित्रीकोणहरू बराबर भएको बहुभुजलाई नियमित बहुभुज भनिन्छ । समबाहु त्रिभुज नियमित त्रिभुज हो भने वर्गलाई नियमित चतुर्भुज भनिन्छ । त्यसै गरी चारओटा भुजाले बनेका नियमित बहुभुजभन्दा माथिका नियमित बहुभुजहरूलाई नियमित पञ्चभुज, नियमित षड्भुज आदिले जनाइन्छ ।

14.4.2 नियमित बहुभुजका भित्री कोणहरूको नाप (Measurement of Interior Angles of Regular Polygon)

क्रियाकलाप 24

चित्रमा विभिन्न किसिमका नियमित बहुभुजहरू दिइएका छन् । चित्र न. (क) मा देखाएको जस्तै गरी विकर्णहरू खिची प्रत्येक बहुभुजहरूमा बन्न सक्ने त्रिभुज बनाउने अभ्यास गर्नुहोस् र कतिओटा त्रिभुजहरू बने तालिकामा भर्नुहोस् ।

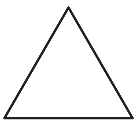
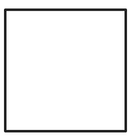
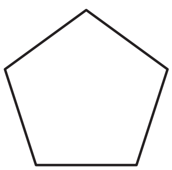
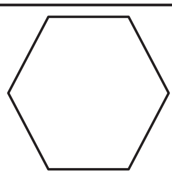
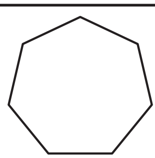


चित्र (क) चित्र (ख) चित्र (ग) चित्र (घ) चित्र (ङ)

नियमित बहुभुजको नाम	भुजाको सङ्ख्या	त्रिभुजको सङ्ख्या
चतुर्भुज	4	2

क्रियाकलाप 25

तल तालिकामा दिइएका चित्रहरूको अवलोकन गर्नुहोस् र प्रोट्याक्टरको प्रयोगबाट तिनीहरूका भित्री कोणहरू नाप्नुहोस् । क्रियाकलाप 24 को नतिजा समेत आधारमा तालिका पूरा गर्नुहोस् र जोडीमा बसी निम्नलिखित प्रश्नमा पनि छलफल गर्नुहोस् :

नियमित बहुभुजको चित्र	**नियमित बहुभुजको नाम**	**भुजाहरूको सङ्ख्या**	**त्रिभुजको सङ्ख्या**	**भित्री कोणहरूको योगफल**
	त्रिभुज (Triangle)	3	1	180^0
				
				
				
				
n भुजा भएको बहुभुज				

(क) बहुभुजमा विकर्णहरू खिच्दा बनेका त्रिभुजका सङ्ख्या र बहुभुजका भुजाहरूको सङ्ख्याबिच कस्तो सम्बन्ध छ, लेख्नुहोस् ।

(ख) बहुभुजमा विकर्णहरू खिच्दा बनेका त्रिभुजका सङ्ख्या र भित्री कोणहरूको योगफल बिचको सम्बन्ध कस्तो देखिन्छ ?

(ग) बहुभुजका भुजाहरूको सङ्ख्या र भित्री कोणहरूको योगफलबिच कस्तो सम्बन्ध देखिन्छ ?

(ग) भुजाको सङ्ख्या n भएको बहुभुजको भित्री कोणहरूको योगफल कति हुन्छ ?

(घ) अष्टभुजका भित्री कोणहरूको योगफल कति हुन्छ, होला ?

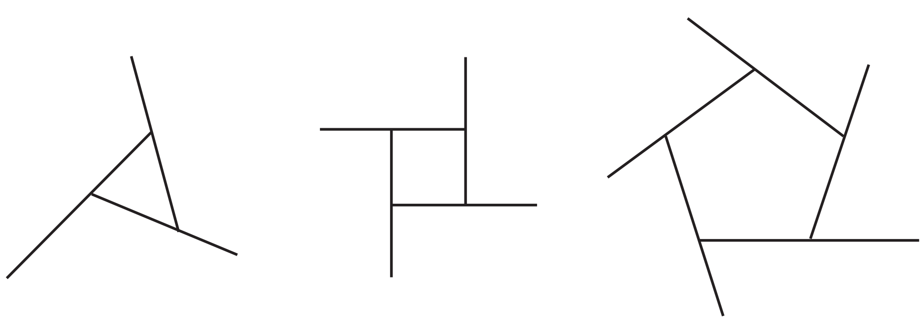
यदि बहुभुजका भुजाको सङ्ख्या n भए,

भित्री कोणहरूको योगफल $= (n-2) \times 180°$ र नियमित बहुभुजको एक भित्री कोणको नाप $= \frac{(n-2)}{n} \times 180^0$ हुन्छ ।

14.4.2 नियमित बहुभुजका बाहिरी कोणहरूको नाप (Measurement of Exterior Angles of Regular Polygon)

क्रियाकलाप 26

तल चित्रमा विभिन्न नियमित बहुभुजहरूका सबै भुजाहरूलाई लम्ब्याउँदा बनेका बाहिरी कोणहरू दिइएका छन् । यसै गरी अन्य 3/4 ओटा अन्य नियमित बहुभुजहरू र तिनीहरूका सबै भुजाहरूलाई लम्ब्याएर बाहिरी कोणहरू बनाउनुहोस् । अब प्रोट्याक्टरको प्रयोगबाट सबै बहुभुजका सबै भित्री तथा बाहिरी कोणहरूको नाप लिई तालिकामा भर्नुहोस् ।



समबाहु त्रिभुज　　　वर्ग　　　नियमित पञ्चभुज

नियमित बहुभुजको नाम	भित्री कोणको नाप	बाहिरी कोणको नाप	बाहिरी कोणहरूको योगफल
n भुजा भएको बहुभुज			

यदि बहुभुजका भुजाहरूको सङ्ख्या n भए,
बाहिरी कोणहरूको योगफल = 360^0 र एक बाहिरी कोणको नाप = $360^0/n$ हुन्छ ।

उदाहरण 1

भुजाको सङ्ख्या 5 भएका बहुभुजका भित्री तथा बाहिरी कोणहरूको योगफल कति कति हुन्छ, पत्ता लगाउनुहोस् ।

समाधान

यहाँ,

बहुभुजका भुजाको सङ्ख्या (n) = 5

हामीलाई थाहा छ,

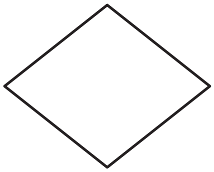
भित्री कोणहरूको योगफल = $(n - 2) \times 180°$
= $(5 - 2) \times 180°$
= $3 \times 180°$
= $540°$

बाहिरी कोणहरूको योगफल = $360°$

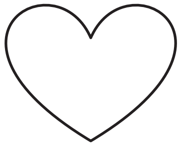
अभ्यास 14.4

1. दिइएका चित्रहरूमध्ये कुन कुन बहुभुज हुन् र कुन कुन होइनन्, छुट्याउनुहोस् :

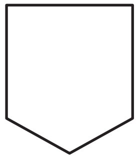
(क)



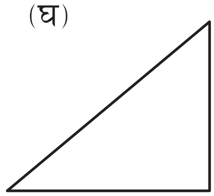
(ख)



(ग)

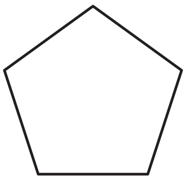


(घ)

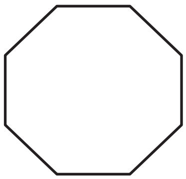


2. दिइएका बहुभुजहरूका भुजाको सङ्ख्या र बहुभुजहरूको नाम लेख्नुहोस् :

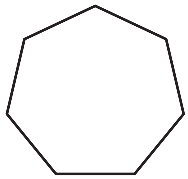
(क)



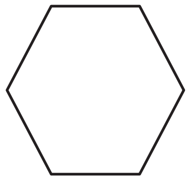
(ख)



(ग)

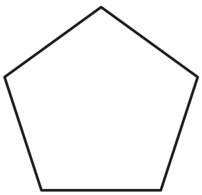


(घ)

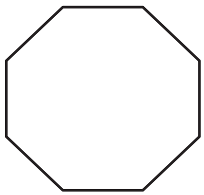


3. सँगै दिइएको बहुभुजहरूबाट बन्न सक्ने त्रिभुजहरू बनाई तिनीहरूको नामकरण गर्नुहोस् :

(क)



(ख)



4. तलका नियमित बहुभुजका भुजा सङ्ख्या (n) दिइएको अवस्थामा भित्री कोणको नाप निकाल्नुहोस् :

(क) n= 7 (ख) n=10 (ग) n= 12

5. तलका नियमित बहुभुजका भुजा सङ्ख्या (n) दिइएको अवस्थामा बाहिरी कोणको नाप निकाल्नुहोस् :

(क) n= 6 (ख) n=9 (ग) n= 11

6. **तलका बहुभुजका भुजा सङ्ख्या (n) दिइएको अवस्थामा भित्री कोणहरूको योग निकाल्नुहोस् ।**

(क) $n = 6$ (ख) $n = 9$ (ग) $n = 10$ (घ) $n = 11$

7. **तलका बहुभुजका भुजा सङ्ख्या (n) दिइएको अवस्थामा बाहिरी कोणहरूको योग निकाल्नुहोस् ।**

(क) $n = 6$ (ख) $n = 9$ (ग) $n = 10$ (घ) $n = 11$

परियोजना कार्य

कक्षामा चार पाँच जनाको समूह बनाउनुहोस् । प्रत्येक समूहले एक एकओटा नेपालको झन्डा लिनुहोस् । समूहमा उक्त झन्डामा प्रयोग गरिएका विभिन्न आकृतिको अध्ययन गर्नुहोस् । कसरी नेपालको नक्साको निर्माण गर्न सकिन्छ भन्ने कुरा समूहमा छलफल गर्नुहोस् । छलफलअनुसार प्रक्रियागत चरण तयार पार्नुहोस् । यी चरणअनुसारको झन्डाको निर्माण गर्नुहोस् । कक्षामा प्रस्तुत गर्नुहोस् ।

उत्तर

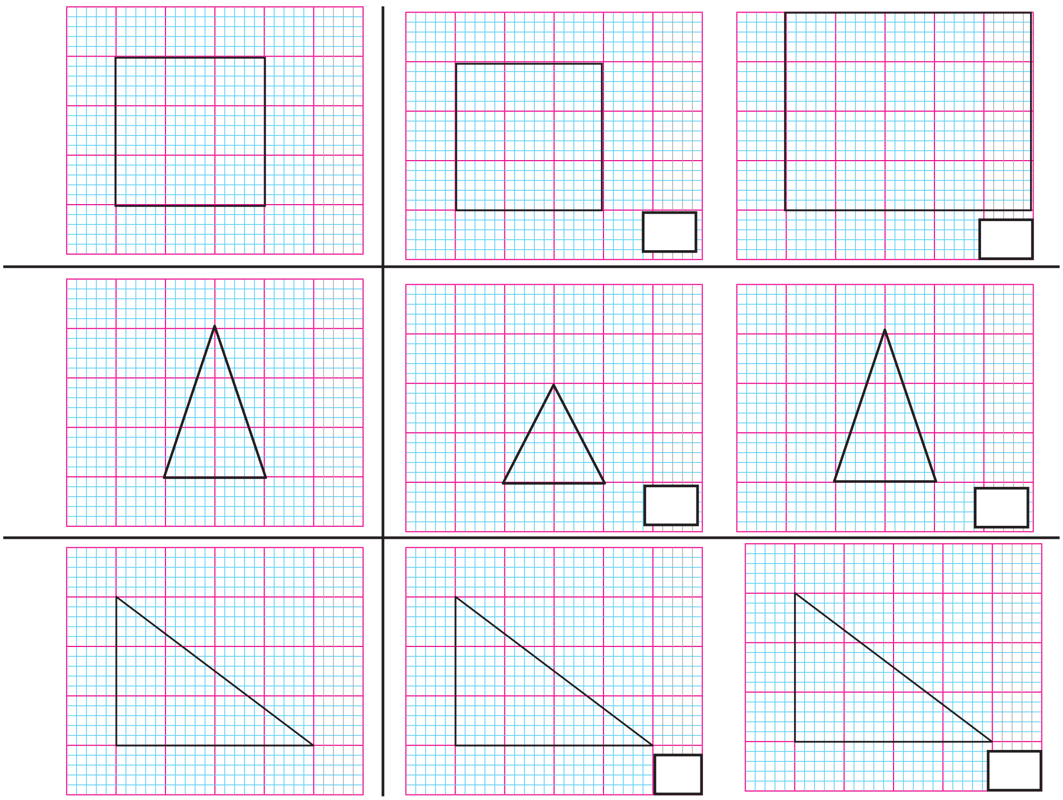
शिक्षकलाई देखाउनुहोस् ।

पाठ 15

अनुरूपता र समरूपता
(Congruency and Similarity)

15.0 पुनरवलोकन (Review)

(क) दिइएका चित्रहरू अवलोकन गर्नुहोस् । दिइएको चित्रसँग उस्तै आकार र बराबर नापका भए (अ) उस्तै आकारका तर बराबर नापका नभए (स) लेख्नुहोस् तथा दुवै नभएमा (न) लेख्नुहोस् र निष्कर्ष समूहमा बसेर छलफल गर्नुहोस् ।



15.1 अनुरूप त्रिभुजहरू (Congruent Triangles)

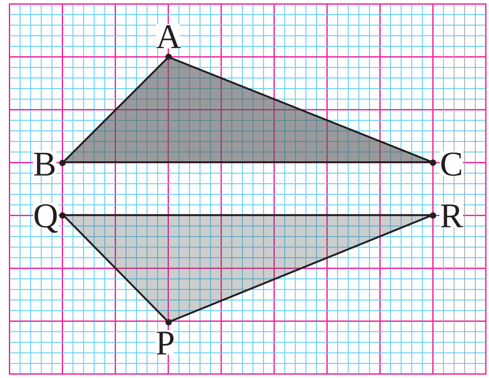
क्रियाकलाप 1

एउटा ग्राफ पेपर वा वर्गाङ्कित कागज लिनुहोस् ।

चित्रमा देखाइएका जस्तै दुई त्रिभुज ABC र PQR बनाउनुहोस् ।

अब त्यसलाई काटी तिनीहरूलाई एकआपसमा खप्ट्याएर राख्नुहोस् । ती त्रिभुजहरू बराबर नापका छन् वा छैनन् अवलोकन गर्नुहोस् ।

अवलोकनबाट प्राप्त नतिजालाई सँगैका साथीसँग छलफल गरी निष्कर्ष लेख्नुहोस् ।



माथिका चित्रमा ∠BAC = ∠QPR, ∠ABC = ∠PQR र ∠BCA = ∠QRP तथा AB =PQ, BC = QR, र AC = PR छन् । यहाँ, ∠BAC र ∠QPR, ∠ABC र ∠PQR तथा ∠BCA र ∠QRP सङ्गति कोणहरू हुन् भने भुजाहरू AB र PQ, BC र QR, तथा AC र PR सङ्गति भुजाहरू हुन् । त्यसैले ΔABC र ΔPQR अनुरूप छन् ।

उस्तै आकार र बराबर नाप भएका दुई त्रिभुजलाई अनुरूप त्रिभुज भनिन्छ । अनुरूप त्रिभुजका सङ्गति कोणहरू र सङ्गति भुजाहरू बराबर हुन्छन् । यदि दुई त्रिभुज ΔABC र ΔPQR अनुरूप भए यसलाई सङ्केतमा ΔABC ≅ ΔPQR लेखिन्छ ।

15.2 अनुरूप त्रिभुजहरूको परीक्षण (Test of Congruent Triangles)

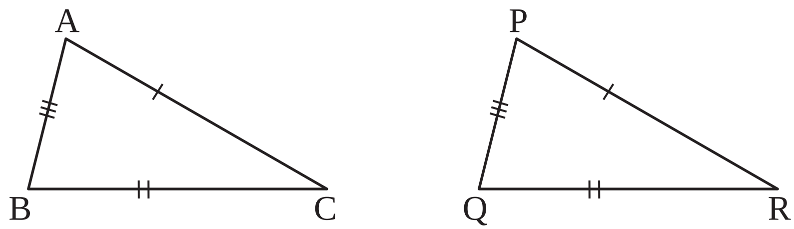
कुन कुन सर्तहरूका आधारमा ΔABC सँग अनुरूप हुने गरी ΔPQR को रचना गर्न सकिन्छ, छलफल गर्नुहोस् ।

(क) भुजा कोण र भुजा (भु. को. भु.)

क्रियाकलाप 2

सर्वप्रथम चित्रमा देखाए जस्तै एउटा त्रिभुज ABC बनाउनुहोस् ।

त्रिभुज ABC का दुई भुजाहरू AB, BC र यी भुजाहरू बिचको कोण ∠ABC सँग क्रमश: बराबर हुने गरी दुई भुजाहरू PQ, QR र यी भुजाहरू बिचको कोण ∠PQR भएको त्रिभुज PQR बनाउनुहोस् ।



अब बाँकी रहेका कोणहरू तथा भुजाहरूको नाप लिई दिइएको तालिकामा भर्नुहोस् र खाली ठाउँ भरी निष्कर्षलाई पूरा गर्नुहोस् :

आधार	**ΔABC मा**	**ΔPQR मा**	**परिणाम**
रचनाका सर्तहरू	AB=	PQ=	AB = PQ
	$\angle$ABC =	$\angle$PQR	$\angle$ABC = $\angle$PQR
	BC =	QR =	BC= QR
परीक्षणका भागहरू	AC =	PR =	
	$\angle$BAC =	$\angle$QPR =	
	$\angle$ACB =	$\angle$PRQ =	

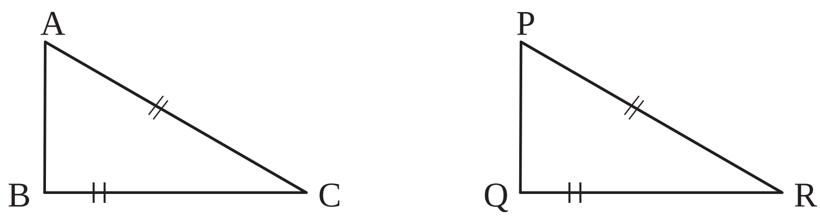
निष्कर्ष : ΔABC का दुईओटा भुजाहरू र तिनीहरू बिचको कोणको नाप र ΔPQR का दुईओटा भुजा र तिनीहरू बिचको कोणको नापसँग बराबर भएको अवस्थामा बाँकी रहेका सङ्गति भुजाहरू र कोणहरू पनि ________________ हुने भएकाले ΔABC र ΔPQR ______________ त्रिभुजहरू हुन् ।

यदि एउटा त्रिभुजमा दुईओटा भुजाहरू र तिनीहरू बिचको कोण अर्को त्रिभुजका दुईओटा भुजा र तिनीहरू बिचको कोण अलग अलग आपसमा बराबर छन् भने उक्त दुई त्रिभुज अनुरूप हुन्छन् । यसलाई भुजा कोण भुजा (भु.को.भु.) अनुसार अनुरूप भएको मानिन्छ ।

(ख) समकोण, कर्ण र भुजा (स. क. भु.)

क्रियाकलाप 3

चित्रमा देखाए जस्तै B मा समकोण हुने गरी एउटा समकोण त्रिभुज ABC बनाउनुहोस् । त्रिभुजABC का कर्ण AC र भुजा BC सँग क्रमशः बराबर हुने गरी कर्ण PR र भुजा QR भएको समकोण त्रिभुज PQR बनाउनुहोस् ।



अब बाँकी रहेका कोणहरू तथा भुजाहरूको नाप लिई दिइएको तालिकामा भर्नुहोस् र खाली ठाउँ भरी निष्कर्षलाई पूरा गर्नुहोस् :

आधार	ΔABC मा	ΔPQR मा	परिणाम
रचनाका सर्तहरू	BC =	QR =	BC = QR
	∠ABC = 90°	∠PQR = 90°	∠ ABC= ∠PQR
	AC=	PR =	AC = PR
परीक्षणका भागहरू	∠AB =	PQ =	
	∠CBA =	∠RQP =	
	∠ACB =	∠PRQ =	

निष्कर्ष : समकोण त्रिभुज ΔABC र ΔPQR मा समकोण, कर्ण र एउटा भुजा क्रमशः आपसमा बराबर भएको अवस्थामा बाँकी दुईओटा सङ्गति कोणहरू र भुजाहरू पनि ________________ हुने भएकाले ΔABC र ΔPQR ________________ त्रिभुजहरू हुन्छन् ।

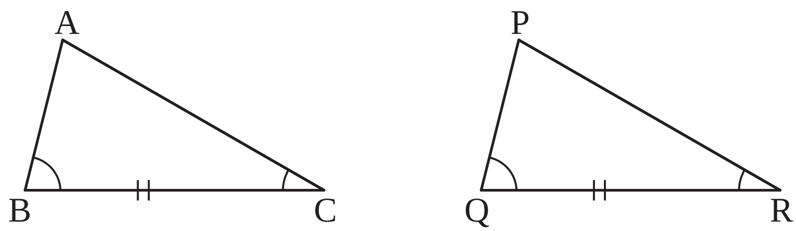
यदि एउटा त्रिभुजको समकोण, कर्ण र एउटा भुजा अर्को त्रिभुजको समकोण, कर्ण र एउटा भुजासँग अलग अलग आपसमा बराबर छन् भने उक्त दुई त्रिभुजहरूअनुरूप हुन्छन् । यसलाई समकोण कर्ण भुजा (स.क.भु.) अनुसार अनुरूप भएको मानिन्छ ।

(ग) कोण, भुजा र कोण (को. भु. को.)

क्रियाकलाप 4

चित्रमा देखाए जस्तै एउटा त्रिभुज ABC बनाउनुहोस् ।

त्रिभुज ABC का दुई कोणहरू ∠ABC, ∠ACB र यी कोणहरू बिचका भुजा BC सँग क्रमशः बराबर हुने गरी दुई कोणहरू ∠PQR, ∠PRQ र यी कोणहरू बिचका भुजा QR भएको त्रिभुज PQR बनाउनुहोस् ।



अब बाँकी रहेका कोणहरू तथा भुजाहरूको नाप लिई दिइएको तालिकामा भर्नुहोस् र खाली ठाउँ भरी निष्कर्षलाई पूरा गर्नुहोस् :

आधार	ΔABC मा	ΔPQR मा	परिणाम
रचनाका सर्तहरू	∠ABC =	∠PQR =	∠ABC = ∠PQR
	BC =	QR =	BC = QR
	∠ACB =	∠PRQ =	∠ACB = ∠PRQ
परीक्षणका भागहरू	AC =	PR =	
	AB =	PQ =	
	∠CAB =	∠RPQ =	

निष्कर्षः ΔABC का दुईओटा कोणहरू र तिनीहरू बिचका भुजाको नाप र ΔPQR का दुईओटा कोणहरू र तिनीहरू बिचको भुजाका नापसँग बराबर भएको अवस्थामा बाँकी रहेका सङ्गति कोणहरू र भुजाहरू पनि ______________ हुने भएकाले ΔABC र ΔPQR ____________ त्रिभुजहरू हुन्छन् ।

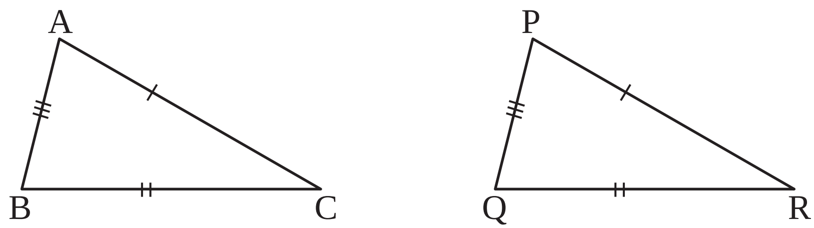
यदि एउटा त्रिभुजमा दुईओटा कोण र तिनीहरू बिचको भुजा अर्को त्रिभुजका दुईओटा कोण र तिनीहरू बिचका भुजा अलग अलग आपसमा बराबर छन् भने उक्त दुई त्रिभुज अनुरूप हुन्छन् । यसलाई कोण भुजा कोण (को.भु.को.) अनुसार अनुरूप भएको मानिन्छ ।

(घ) भुजा भुजा भुजा (भु. भु. भु.)

क्रियाकलाप 5

तल चित्रमा देखाए जस्तै एउटा त्रिभुज ABC बनाउनुहोस् :

त्रिभुज ABC का तीन भुजाहरू AB, BC र AC सँग क्रमशः बराबर हुने गरी भुजाहरू PQ, QR र PR भएको त्रिभुज PQR बनाउनुहोस् ।



प्रोट्याक्टरको प्रयोगबाट कोणहरूको नाप लिई दिइएको तालिकामा भर्नुहोस् र खाली ठाउँ भरी निष्कर्षलाई पूरा गर्नुहोस् ।

आधार	ΔABC **मा**	ΔPQR **मा**	**परिणाम**
रचनाका सर्तहरू	AB =	PQ =	AB = PQ
	∠ABC = 90°	QR =	BC = QR
	AC =	PR =	AC = PR
परीक्षणका भागहरू	∠BAC =	∠QPR =	
	∠CBA =	∠RQP =	
	∠ACB =	∠PRQ =	

निष्कर्षः ΔABC का तीनओटा भुजाहरू र ΔPQR का तीनओटा भुजाहरूसँग अलग अलग बराबर भएको अवस्थामा बाँकी तीनओटै सङ्गति कोणहरूको नाप ______________ हुने भएकाले ΔABC र ΔPQR ____________ त्रिभुजहरू हुन्छन् ।

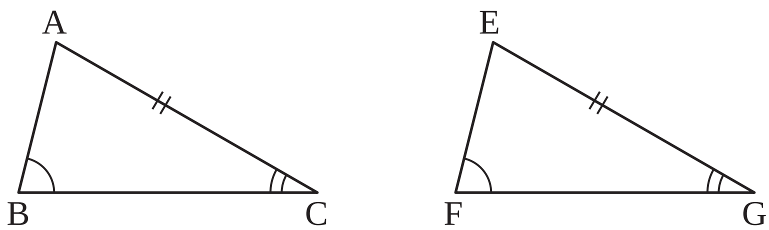
यदि एउटा त्रिभुजका तीनओटा भुजाहरू अर्को त्रिभुजका तीनओटा भुजाहरूसँग अलग अलग आपसमा बराबर छन् भने उक्त दुई त्रिभुज अनुरूप हुन्छन् । यसलाई भुजा भुजा भुजा (भु.भु.भु.) अनुसार अनुरूप भएको मानिन्छ ।

(ङ) कोण, कोण र भुजा (को. को. भु.)

क्रियाकलाप 6

चित्रमा देखाए जस्तै एउटा त्रिभुज ABC बनाउनुहोस् ।

त्रिभुज ABC का दुई कोण $\angle ABC$, $\angle ACB$ र एउटा भुजा AC क्रमशः बराबर हुने गरी दुई कोण $\angle EFG$, $\angle FGE$ र एउटा भुजा EG भएको त्रिभुज EFG बनाउनुहोस् ।



अब बाँकी रहेका कोणहरू तथा भुजाहरूको नाप लिई तल दिइएको तालिकामा भर्नुहोस् र खाली ठाउँ भरी निष्कर्षलाई पूरा गर्नुहोस् ।

आधार	ΔABC मा	ΔEFG मा	परिणाम
रचनाका सर्तहरू	$\angle ABC =$	$\angle EFG =$	$\angle ABC = \angle EFG$
	$\angle ACB =$	$\angle FGE =$	$\angle ACB = \angle FGE$
	AC =	EG =	AC = EG
परीक्षणका भागहरू	BC =	FG =	
	AB =	EF =	
	$\angle CAB =$	$\angle GEF =$	

निष्कर्ष : ΔABC का दुईओटा कोणहरू र कुनै एक भुजाको नाप र ΔEFG का दुईओटा कोणहरू र कुनै एक भुजाको नापसँग बराबर भएको अवस्थामा बाँकी रहेका सङ्गति कोणहरू र भुजाहरू पनि ______________ हुने भएकाले ΔABC र ΔEFG______________ त्रिभुजहरू हुन्छन् ।

एउटा त्रिभुजको एउटा भुजा, त्यसमा पर्ने एउटा कोण र त्यसैको सम्मुख कोण अर्को त्रिभुजको एउटा भुजा, त्यसमा पर्ने एउटा कोण र त्यसैको सम्मुख कोणसँग क्रमश : अलग अलग बराबर भएमा ती त्रिभुजहरू अनुरूप भएको मानिन्छ ।

विचारणीय प्रश्न : एउटा त्रिभुजका कुनै दुईओटा भुजाहरू र कुनै एउटा कोण अर्को त्रिभुजको दुईओटा भुजाहरू र एउटा कोणसँग अलग अलग बराबर भएको अवस्थामा पनि के ती दुई त्रिभुजहरू अनुरूप हुन्छन्, छलफल गर्नुहोस् ।

उदाहरण 1

दिइएका जोडी त्रिभुजहरू कुन तथ्य वा सिद्धान्तका आधारमा अनुरूप हुन्छन्, कारणसहित लेख्नुहोस् :

(क)

(ख)

(ग)

(घ)

समाधान

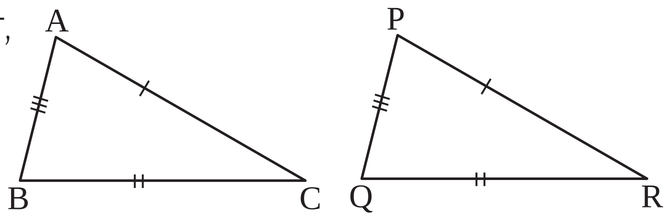
यहाँ,

(क) यहाँ ΔABC र ΔPQR मा,

AB = PQ (भु.)

AC = PR (भु.)

BC = QR (भु.)



ΔABC र ΔPQR का तीनैओटा भुजा आपसमा बराबर भएकाले भु.भु.भु.को आधार ती त्रिभुजहरू अनुरूप छन् ।

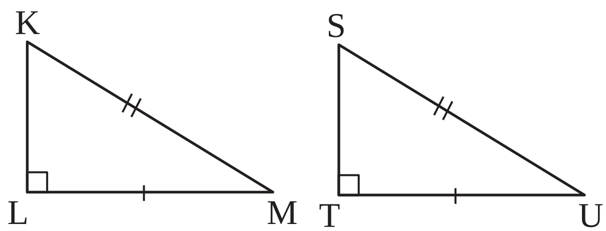
(ख) यहाँ ΔKLM र ΔSTU मा,

∠KLM = ∠STU = 90° (स.)

MK = SU (क.)

LM = ST (भु.)

∴ ΔKLM ≅ ΔSTU [स.क.भु.बाट]



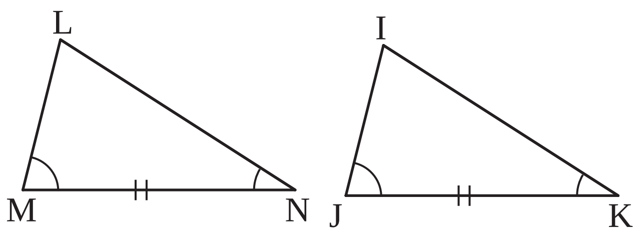
(ग) यहाँ, ΔLMN र ΔIJK मा,

∠LMN = ∠IJK (को.)

MN = JK (भु.)

∠LNM = ∠IKJ (को.)

∴ ΔLMN ≅ ΔIJK [को.भु.को.बाट]



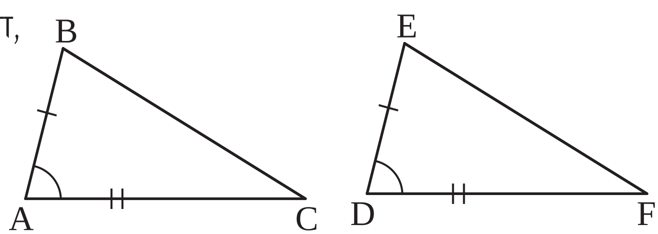
(घ) यहाँ, ΔABC र ΔDEF मा,

AB = DE (भु.)

∠BAC = ∠DEF (को.)

AC = DF (भु.)

∴ ΔABC ≅ ΔDEF [भु.को.भु. बाट]



उदाहरण 2

दिइएका जोडा त्रिभुजहरू अनुरूप छन् । x को मान निकाली बाँकी कोण र भुजाहरूको नाप पत्ता लगाउनुहोस् ।

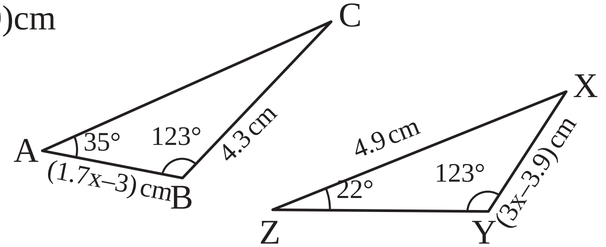
समाधान,

यहाँ त्रिभुजहरू ABC र XYZ अनुरूप छन् ।

$\angle A = \angle X = 35°$, $\angle B = \angle Y = 123°$ र $\angle C = \angle Z = 22°$

फेरि AB = XY

or, $(1.7x - 1.3)$ cm = $(3x - 3.9)$cm



or, $3x - 1.7x = 3.9 - 1.3$

or, $1.3x = 2.6$

$\therefore x = \frac{2.6}{1.3} = 2$

त्यसकारण $AB = 1.7x - 1.3 = 1.7 \times 2 - 1.3 = 2.1$cm

$XY = 3x - 3.9 = 3 \times 2 - 3.9 = 2.1$cm

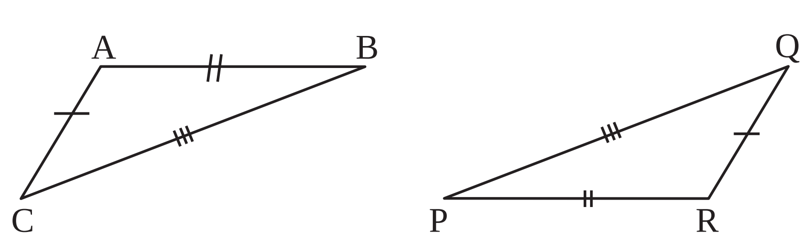
AC = XZ = 4.9cm

BC = YZ = 4.3 cm

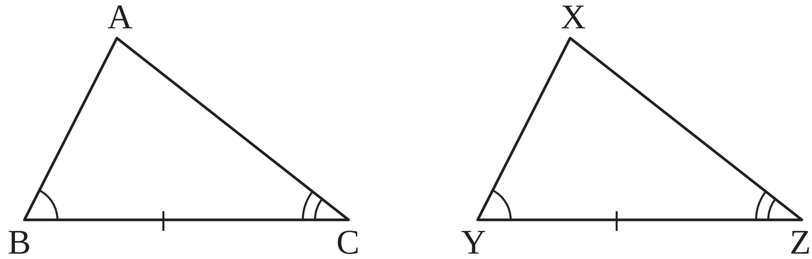
अभ्यास 15.1

1. **दिइएका त्रिभुजहरू कुन तथ्यका आधारमा अनुरूप छन्, पत्ता लगाउनुहोस् :**

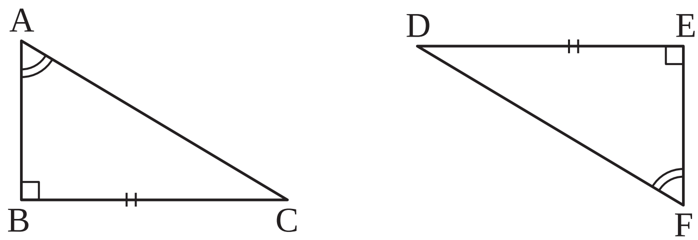
(क)



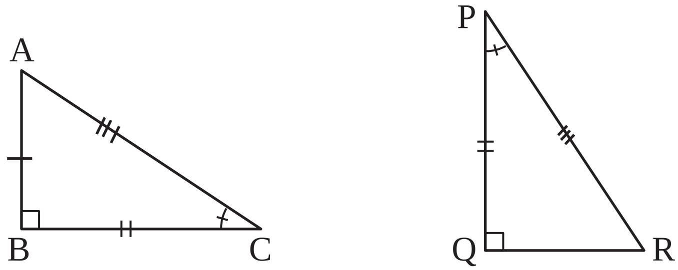
(ख)



(ग)

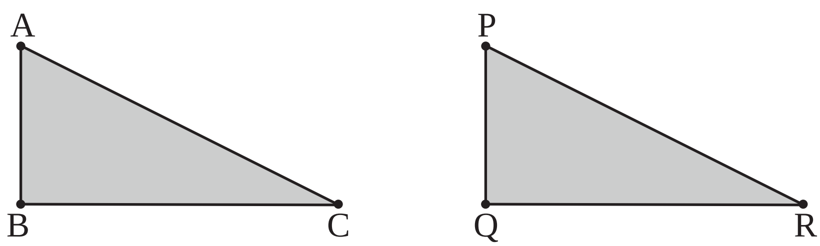


(घ)

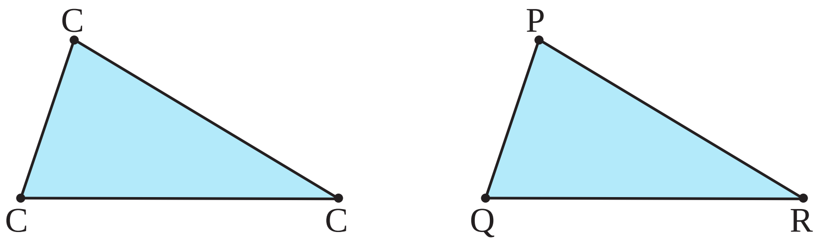


2. दिइएको अवस्थामा जोडी त्रिभुजहरू अनुरूप छन् वा छैनन्, कोण र भुजाहरू नापेर हेर्नुहोस् । यदि अनुरूप छन् भने सङ्गति कोणहरू र सङ्गति भुजाहरू कुन कुन हुन् छुट्याउनुहोस् ।

(क)

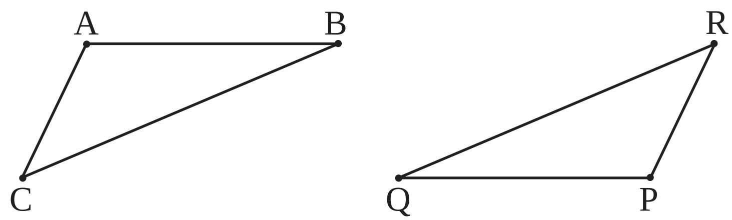


(ख)

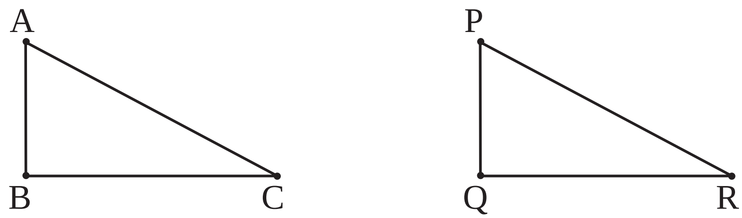


3. यदि ΔABC र ΔPQR अनुरूप (वा $\Delta ABC \cong \Delta PQR$) छन् भने सङ्गति कोणहरू र सङ्गति भुजाहरू के के हुन्, लेख्नुहोस् :

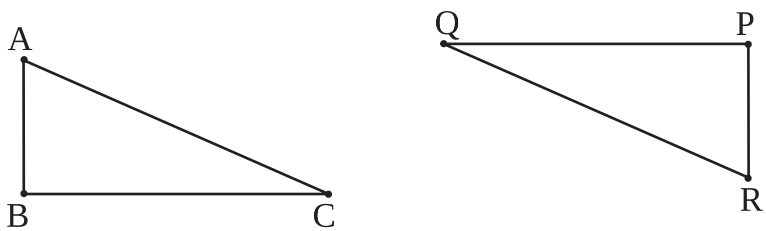
(क)



(ख)



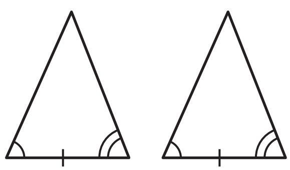
(ग)



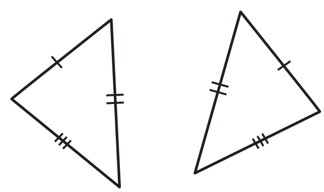
4. ΔABC र ΔPQR अनुरूप बनाउन कुन कुन तीनओटा सङ्गति भुजाहरू बराबर हुनुपर्दछ, लेख्नुहोस् ।

5. तलका जोडी त्रिभुजहरू कुन तथ्यका आधारमा अनुरूप छन्, लेख्नुहोस् :

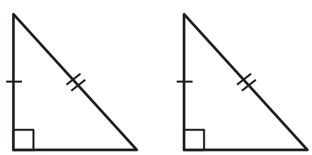
(क)



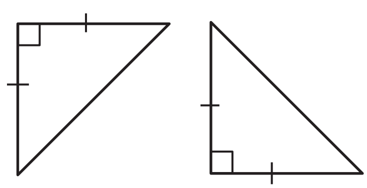
(ख)



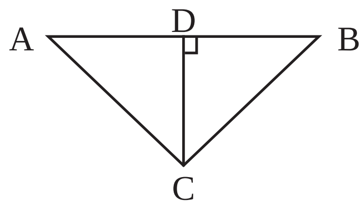
(ग)



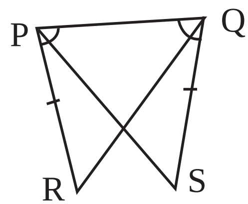
(घ)



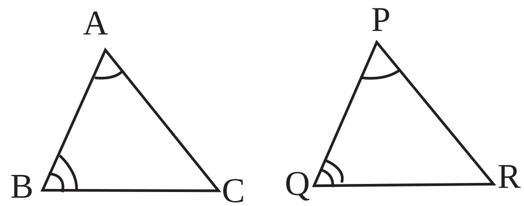
6. दिइएको चित्रमा बिन्दु D रेखा AB को मध्यबिन्दु हो र $CD \perp AB$ छ भने ΔACD र ΔBCD अनुरूप हुन्छ भनी देखाउनुहोस् ।



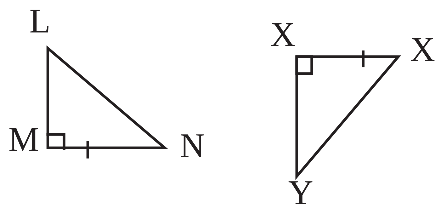
7. सँगैको चित्रमा $\angle RPQ = \angle PQS$ र $QS = PR$ भए ΔPQR र ΔQPS अनुरूप हुन्छ भनी प्रमाणित गर्नुहोस् ।



8. ΔABC र ΔPQR मा $\angle BAC = \angle QPR$ र $\angle ABC = \angle PQR$ छ । तलका मध्ये कुन अवस्था थपेपछि $\Delta ABC \cong \Delta PQR$ हुन्छ ?



9. चित्रमा कुन अवस्था थपेपछि ΔLMN र ΔXYZ अनुरूप हुन्छन् ? जहाँ $\angle LMN = \angle YXZ = 90^0$ छ र $MN = XZ$ छ । कुन तथ्यका आधारमा अनुरूप हुन्छन् ?



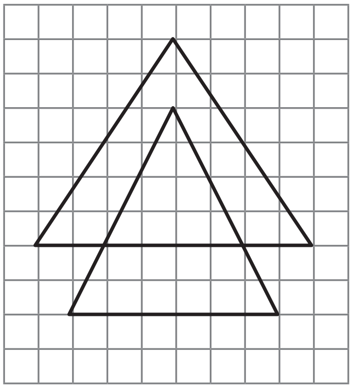
उत्तर शिक्षकलाई देखाउनुहोस् ।

15.3 समरूप आकृतिहरू (Similar Figures)

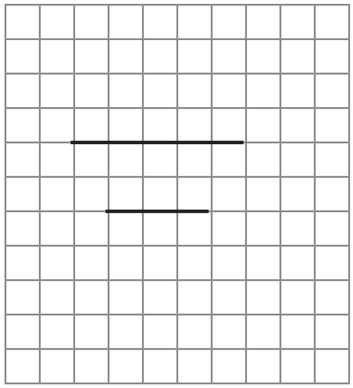
क्रियाकलाप 7

तल तीनओटा वर्गाङ्कित कागजका वर्कसिटहरू दिइएका छन् । (ख) र (ग) वर्कसिटमा दिइएको रेखाखण्डको प्रयोग गरी (क) वर्कसिटमा बनाइएको जस्तै आकृति पनि बनाउनुहोस् र निम्नलिखित प्रश्नहरूमा छलफल गर्नुहोस् :

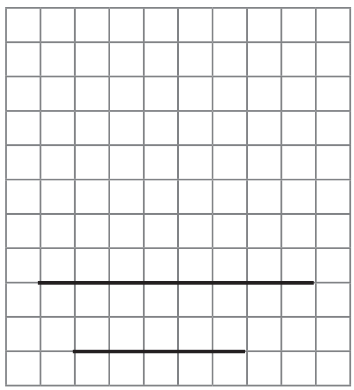
(क)



(ख)



(ग)



(अ) के सबै आकृतिहरूको आकार एउटै छ ?

(आ) आकृतिका कोणहरूको सम्बन्ध कस्तो होला ?

(इ) के सबै चित्रमा भएका आकृतिहरू एउटै नापका छन् ?

(ई) आकृतिका नाप फरक पर्नुको कारण के होला ?

(उ) यी कस्ता आकृतिहरू हुन् ?

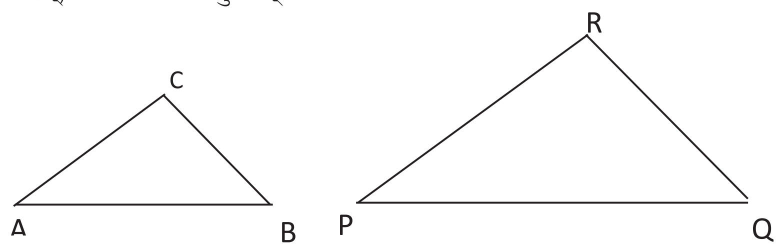
माथि दिइएको (ख) र (ग) वर्कसिटमा पनि (क) मा दिइएको जस्तै आकृति बन्छ, तर वर्कसिट (क) मा दिइएको भन्दा वर्कसिट (ख) मा बन्ने आकृति सानो र वर्कसिट (ग) मा बन्ने आकृति ठुलो हुन्छ ।

उही आकारका दुई समतलीय चित्रहरूलाई समरूप चित्र भनिन्छ । उही आकारका सानो वा ठुलो वा समान नापका भए ती आकृतिहरू समरूप हुन्छन् ।

15.4 समरूप त्रिभुजहरू (Similar Triangles)

क्रियाकलाप 8

एउटा फोटोकपी पेपर लिनुहोस् र त्यसमा फरक फरक नाप भएका दुईओटा रेखाखण्ड AB र PQ खिच्नुहोस् । अब चित्रमा देखाएको जस्तै गरी बिन्दु A र P मा साथै B र Q मा समान हुने गरी निश्चित नापका कोण खिच्नुहोस् र कोणका बाहुहरू काटिएका बिन्दुलाई क्रमश : C र R नामकरण गर्नुहोस् । कस्तो आकृति बन्यो ? के दुवै आकृतिहरू समान किसिमका छन्, छलफल गर्नुहोस् ।



अब तपाईंले बनाएका ती दुई त्रिभुजलाई काटेर निकाल्नुहोस् र ती त्रिभुजहरूलाई एक अर्कामाथि खप्टाई निम्नलिखित प्रश्नहरूमा छलफल गर्नुहोस् :

(क) के दुवै त्रिभुजहरूको आकार एकै किसिमका छन् ?

(ख) त्रिभुज ABC र त्रिभुज PQR मा कुन कुन कोणहरू आपसमा बराबर छन्, पत्ता लगाउनुहोस् ।

(ग) के AB र PQ, BC र QR तथा AC र PR का लम्बाइहरू बराबर छन् ?

(घ) दुवै त्रिभुजका सबै भुजाका नापहरू लिनुहोस् ।

(ङ) त्रिभुज ABC र त्रिभुज PQR मा बराबर कोणका सम्मुख भुजाहरूको अनुपात निकाल्नुहोस् ।

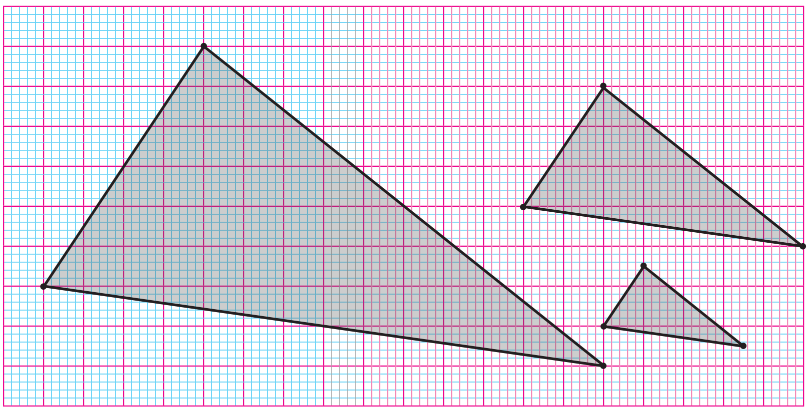
(च) बराबर कोणका सम्मुख भुजाहरूको अनुपातहरूको सम्बन्ध कस्तो देखिन्छ ?

माथि दिइएका ΔABC र ΔPQR समरूप त्रिभुजहरू हुन् । जसमा $\angle BAC = \angle QPR$, $\angle ABC = \angle PQR$ र $\angle ACB = \angle PRQ$ हुनुका साथै $\frac{BC}{QR} = \frac{AC}{PR} = \frac{AB}{PQ}$ पनि छन् । यहाँ बराबर कोणहरू A र P, B र Q तथा C र R सङ्गति कोणहरू हुन् भने बराबर कोणका सम्मुख भुजाहरू BC र QR, AC र PR तथा AB र PQ सङ्गति भुजाहरू हुन् ।

समरूप त्रिभुजमा बराबर कोणहरूलाई सङ्गति कोणहरू र बराबर कोणहरूको सम्मुख भुजाहरूलाई सङ्गति भुजाहरू भनिन्छ । दुई त्रिभुजहरूका सङ्गति कोणहरू बराबर र सङ्गति भुजाहरू समानुपातमा भएमा ती दुई त्रिभुजहरूलाई समरूप त्रिभुज भनिन्छ । समरूप त्रिभुज ABC र PQR लाई सङ्केतमा ABC ~ PQR लेखिन्छ ।

क्रियाकलाप 9

(क) प्रत्येक विद्यार्थीले तलको नापका त्रिभुजहरू चार्टपेपरमा बनाउनुहोस् र काटेर तीनओटा त्रिभुज बनाउनुहोस् :



(ख) प्रत्येक तीनओटै त्रिभुजमा फरक फरक रङ लगाउनुहोस् ।

(ग) सबै त्रिभुजहरू एउटा बक्समा जम्मा गर्नुहोस् ।

(घ) प्रत्येकले बक्सबाट नहेरीकन एक जोडी (दुईओटा) त्रिभुज निकाल्नुहोस् । त्यो जोडीअनुरूप त्रिभुजको हो वा समरूप त्रिभुजको हो यकिन गर्नुहोस् ।

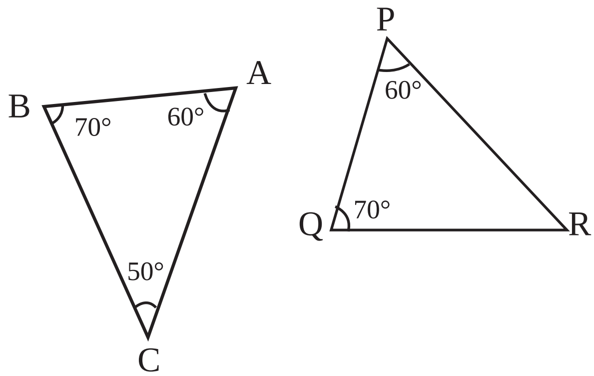
(ङ) अनुरूपको जोडी हुने एकातिर बस्नुहोस् र समरूपको जोडी हुने अर्कोतिर जम्मा हुनुहोस् । कुनको बढी हुन्छ उही समूहको जित हुन्छ ।

(च) यो खेल पाँच छ पटक दोहोऱ्याउनुहोस् ।

(छ) तपाईंले निकालेको प्रत्येक पटकको जोडी त्रिभुजहरू के के थियो र तपाइले अनुरूप हो कि समरूप हो भन्ने कुरा कसरी निर्क्योल लिनुभयो ? त्यसका बारेमा एउटा प्रतिवेदन बनाउनुहोस् ।

उदाहरण 1

दिइएको $\Delta ABC \sim \Delta PQR$ छन् भने



(क) सङ्गति कोण तथा भुजाहरूको नाम लेख्नुहोस् ।

(ख) $\angle PRQ$ को नाप पनि पत्ता लगाउनुहोस् ।

समाधान

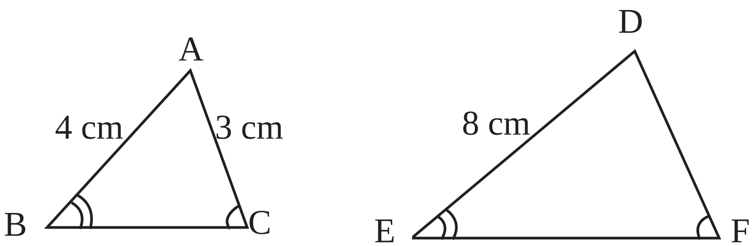
यहाँ $\Delta ABC \sim \Delta PQR$ छ ।

(क) त्यसैले बराबर कोणहरू A र P, B र Q तथा C र R सङ्गति कोणहरू हुन् भने बराबर कोणका सम्मुख भुजाहरू BC र QR, AC र PR तथा AB र PQ सङ्गति भुजाहरू हुन् ।

$\therefore \angle BCA = \angle PRQ = 50°$ हुन्छ ।

उदाहरण 2

यदि दिइएको त्रिभुज $ABC \sim DEF$ भए DF को नाप पत्ता लगाउनुहोस् :



समाधान

यहाँ $\Delta ABC \sim \Delta DEF$ र $\angle B = \angle E$, $\angle C = \angle F$ छ ।

$\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF}$ [$\because$ समरूप त्रिभुजका सङ्गति भुजाहरूको अनुपात बराबर हुने भएकाले]

$\frac{4}{8} = \frac{3}{DF}$

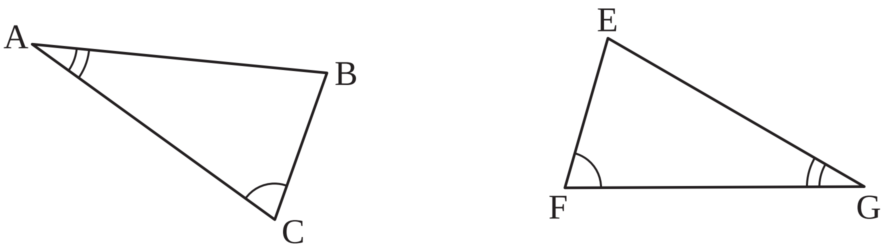
$\therefore DF = 6$ cm

अभ्यास 15.2

1. दिइएका जोडी त्रिभुजहरू समरूप छन् भने तिनीहरूको सङ्गति कोण तथा भुजाहरूको नाम लेख्नुहोस् :

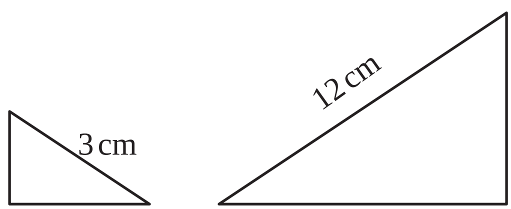
(क)

(ख)



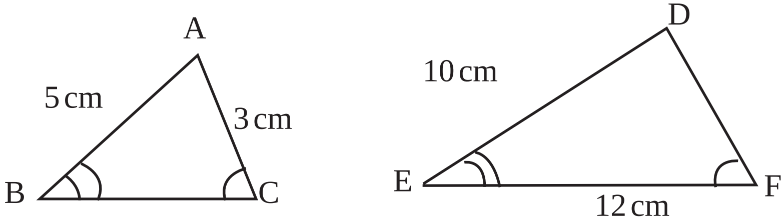
2. यदि ΔIJK र ΔPQR मा सङ्गति भुजाहरूको अनुपात 1:1 छ भने ती त्रिभुजहरू कस्ता त्रिभुज हुन् ?

3. दिइएका समरूप त्रिभुजहरूको सङ्गति भुजाहरूको अनुपात कति हुन्छ, पत्ता लगाउनुहोस् ।

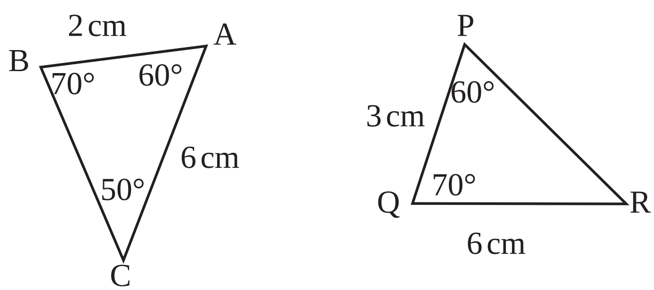


4. दिइएका त्रिभुजहरू समरूप छन् भने थाहा नभएको भुजाको मान पत्ता लगाउनुहोस् :

(क)



(ख)

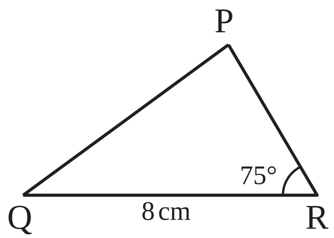


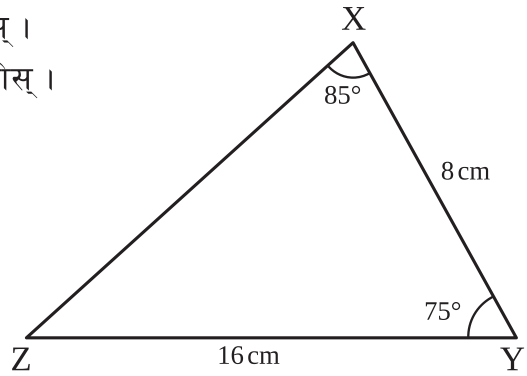
5. सँगैको $\Delta PQR \sim \Delta XYZ$ चित्रमा छन् भने तलका प्रश्नको उत्तर लेख्नुहोस् :

(क) सङ्गति भुजाहरूको अनुपात निकाल्नुहोस् ।

(ख) $\angle PQR$ को मान पत्ता लगाउनुहोस् ।

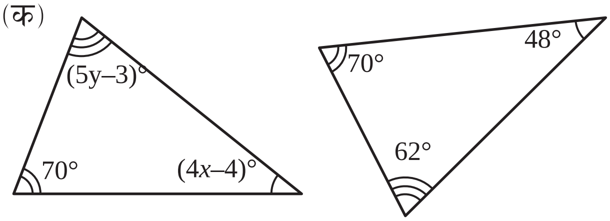
(ग) भुजा PR को नाप पत्ता लगाउनुहोस् ।



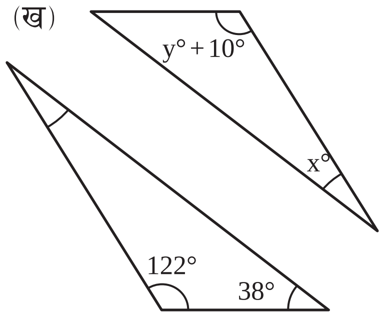


6. तलका समरूप त्रिभुजहरूमा x र y को मान पत्ता लगाई थाहा नभएका भुजा र कोणहरूको मान निकाल्नुहोस् :

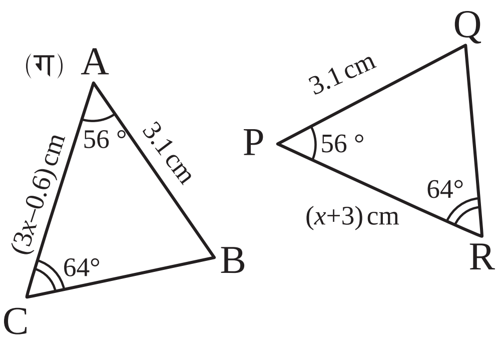
(क)



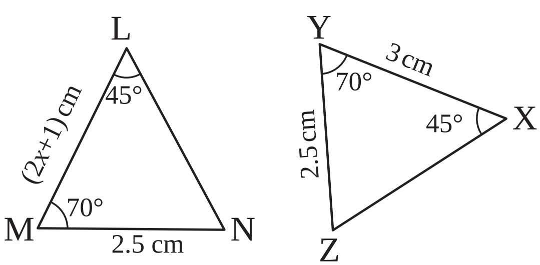
(ख)



(ग)



(घ)



उत्तर

1. शिक्षकलाई देखाउनुहोस् । 2. अनुरूप त्रिभुज 3. 1:4

4. (क) BC = 6 cm, DF = 6 cm (ख) BC = 4 cm, PR = 9 cm

5. (क) 1:2 (ख) 20° (ग) 4 cm

6. (क) $x = 13^o$, $y = 13^o$ (ख) $x = 20^o$, $y = 112^o$

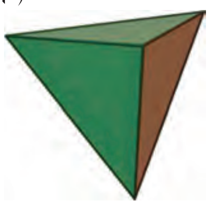
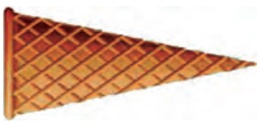
(ग) $x = 1.8$ (घ) $x = 1$,

पाठ 16

ठोस वस्तुहरू
(Solid objects)

16.0 पुनरवलोकन (Review)

(अ) तल ठोस वस्तुहरूका चित्र दिइएको छ । उक्त ठोसवस्तुहरूको अवलोकन गरी तिनीहरूको ज्यामितीय विशेषता समूहमा छलफल गरी टिपोट गर्नुहोस् र कक्षाकोठामा प्रस्तुत गर्नुहोस् :

(क) 	(ख)	(ग)
(घ) 	(ङ)	(च)

(आ) माथि दिइएका ठोस वस्तुहरूको किनारा, सतह र कुनाको सङ्ख्या तालिका बनाई प्रस्तुत गर्नुहोस् ।

(इ) माथि दिइएका ठोस वस्तुहरूको किनारा, सतह र कुनाहरूको सम्बन्ध के के हुन्छ, लेख्नुहोस् ।

16.1 त्रिभुजाकार प्रिज्म र पिरामिड (Triangular base prism and pyramid)

(क) त्रिभुजाकार प्रिज्म

क्रियाकलाप 1

तल त्रिभुजाकार प्रिज्मको चित्र दिइएको छ। यस्तै ठोस वस्तुको अवलोकन गरी सोधिएका प्रश्नमा छलफल गर्नुहोस् :

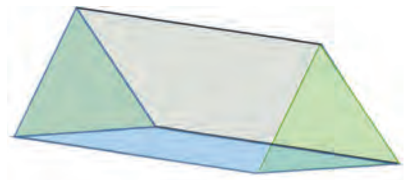
(क) यसमा कतिओटा समतलीय सतह छन् ? ती कस्ता कस्ता आकारका छन् ?

(ख) उक्त प्रिज्ममा सतह, किनारा र कुनाहरू कति कतिओटा छन् ? तिनीहरूको सम्बन्ध कस्तो हुन्छ ?

(ग) त्रिभुजाकार प्रिज्ममा कुन कुन सतहहरू आपसमा अनुरूप हुन्छन् ?

क्रियाकलाप 2

शिक्षकको सहायतामा जुस पाइप वा गहुँको छ्वालीबाट त्रिभुजाकार प्रिज्मका खोक्रो नमुना निर्माण गर्नुहोस् । उक्त प्रिज्मको सतहहरू छुट्याउन फरक फरक रङका कागज टाँसी कक्षाकोठामा प्रस्तुत गर्नुहोस् ।



समतलीय सतहहरूले बनेको ठोस वस्तु प्रिज्म हो । यसमा दुई प्रकारका सतह हुन्छन् । माथिल्लो र तल्लो समानान्तर र अनुरूप सतहहरूलाई प्रिज्मको आधार (Base) भनिन्छ । आधारबाहेकका सतहहरूलाई छड्के सतह (Lateral surface) भनिन्छ । प्रिज्मको नाम यसको आधारको आकारअनुसार हुन्छ, जस्तै : प्रिज्मको आधार त्रिभुज भएमा त्रिभुजाकार प्रिज्म, प्रिज्मको आधार आयत भएमा आयातकार प्रिज्म ।

(ख) पिरामिड

क्रियाकलाप 3

तल ठोस वस्तुहरूको आकृति दिइएको छ । अवलोकन गर्नुहोस् र सोधिएका प्रश्नमा जोडीमा छलफल गर्नुहोस् :

(क) तपाईँले माथिका जस्ता आकृति वा ठोस वस्तुहरू देख्नु भएकै होला ? देख्नु भएको छ भने कहाँ कहाँ देख्नु भएको छ ?

(ख) माथिका ठोस वस्तुहरू कस्ता कस्ता सतहहरू मिलेर बनेका छन् ? कतिओटा सतहहरू मिलेर बनेका छन् ?

(ग) यसका सतह किनारा र शीर्षबिन्दुको सम्बन्ध कस्तो हुन्छ ?

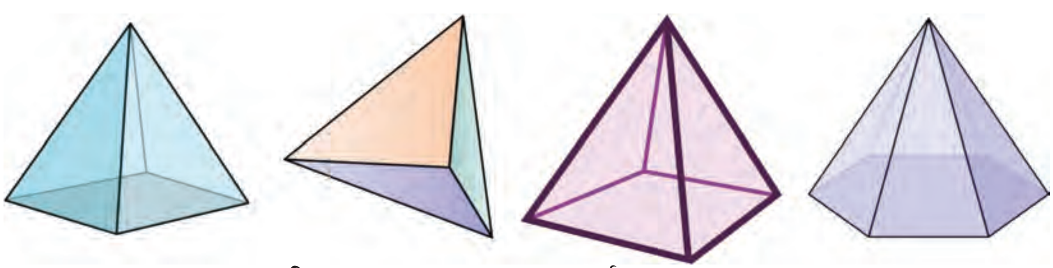
(घ) कुन कुन सतहहरू अनुरूप हुन्छन् ?

दिइएका ठोस आकृतिहरू पिरामिडका हुन् । सबै पिरामिडमा आधारको सतह बहुभुज छन् । पिरामिडमा आधारबाहेक त्रिभुजाकार छड्के सतहहरू (Lateral Surface) हुन्छन् । समकोणी नियमित बहुभुजाकार आधार भएका पिरामिडका सतहहरू आपसमा अनुरूप हुन्छन् । छड्के सतहको एउटा साझा शीर्षबिन्दु हुन्छ । साथै ठाडो उचाइ आधारको सतहसँग लम्ब पनि हुन्छ ।

आधार बहुभुज भएको र छड्के सतहको एउटा साझा शीर्षबिन्दु भएको त्रिआयामिक ठोस वस्तुलाई पिरामिड भनिन्छ । पिरामिडको नाम यसको आधारको बहुभुजको आकारअनुसार हुन्छ, जस्तै : पिरामिडको आधार त्रिभुज भएमा त्रिभुजाकार आधार भएको पिरामिड, पिरामिडको आधार आयत भएमा आयातकार आधार भएको पिरामिड, पिरामिडको आधार वर्ग भएमा वर्गाकार आधार भएको पिरामिड ।

क्रियाकलाप 4

शिक्षकको सहायतामा जुस पाइप वा गहुँको छ्वालीबाट तल दिइएको जस्तो पिरामिडको खोक्रो नमुना निर्माण गर्नुहोस् । उक्त पिरामिडको सतह छुट्याउन फरक फरक रङको कागज टाँसी कक्षाकोठामा प्रस्तुत गर्नुहोस् ।



आयताकार आधार भएको पिरामिड | त्रिभुजाकार आधार भएको पिरामिड | वर्गाकार आधार भएको पिरामिड | षड्भुजाकार आधार भएको पिरामिड

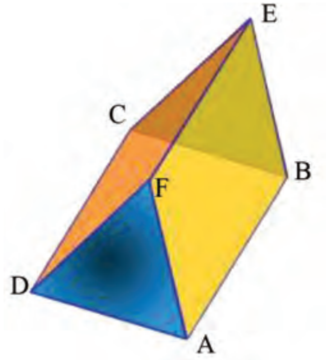
उदाहरण 1

तल चित्रमा त्रिभुजाकार आधार भएका प्रिज्म दिइएको छ । उक्त चित्रको अवलोकन गरी सोधिएका प्रश्नको उत्तर दिनुहोस् :

(क) त्रिभुजाकार आधार भएका प्रिज्मका सबै सतहको नाम लेख्नुहोस् ।

(ख) त्रिभुजाकार आधार भएका प्रिज्ममा कुन कुन सतह अनुरूप छन् ?

(ग) त्रिभुजाकार आधार भएका प्रिज्ममा किनारा, सतह र शीर्षकोणको सम्बन्ध लेख्नुहोस् ।



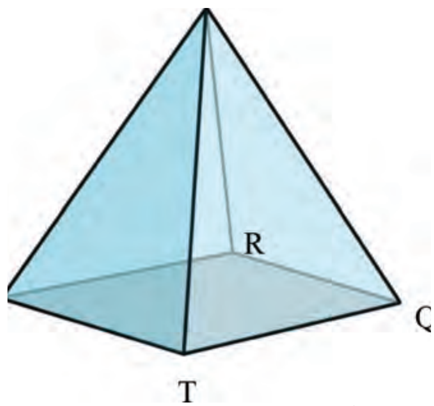
त्रिभुजाकार आधार भएको पिरामिड

उदाहरण 2

तल चित्रमा आयताकार आधार भएका पिरामिड दिइएको छ । उक्त चित्रको अवलोकन गरी तल सोधिएका प्रश्नको उत्तर दिनुहोस् :

(क) त्रिभुजाकार आधार भएका प्रिज्म र आयताकार आधार भएका पिरामिडका सबै सतहको नाम लेख्नुहोस् ।

(ख) त्रिभुजाकार आधार भएका प्रिज्म र आयताकार आधार भएका पिरामिडमा कुन कुन सतह अनुरूप छन् ?



आयताकार आधार भएको पिरामिड

(ग) त्रिभुजाकार आधार भएका प्रिज्म र आयताकार आधार भएका पिरामिडमा किनारा, सतह र शीर्षकोणको सम्बन्ध लेख्नुहोस् ।

16.2 ठोस वस्तुहरूका जालीहरू (Nets of Solid objects)

(क) घन (Cube)

क्रियाकलाप 5

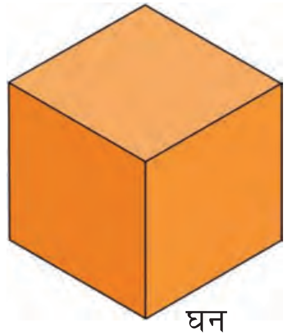
कागज पट्याएर बनाइएको घनको चित्र दिइएको छ । यसका आधारमा सोधिएका प्रश्नहरूमा समूहमा छलफल गर्नुहोस् :

(अ) घनका कतिओटा सतह, किनारा र शीर्षबिन्दुहरू छन् ?

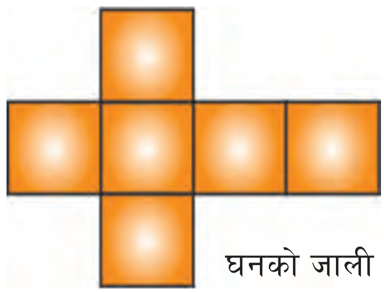
(आ) यसलाई खोलेर हेरियो भने कस्तो देखिन्छ होला ?

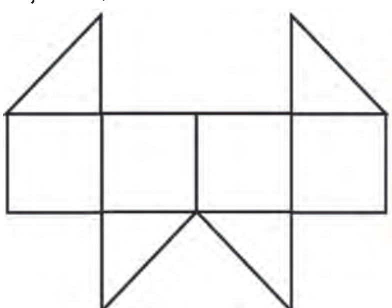
(इ) घन बनाउने योबाहेक अरू पनि जाली हुन्छन्, खोज्नुहोस् ।

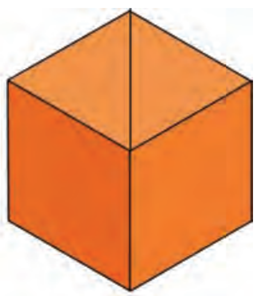
(ई) उक्त घनको जालीबाट घन निर्माण गर्नुहोस् ।


घन

घनमा 6 ओटा सतह 12 ओटा किनारा र 8 ओटा शीर्षबिन्दु हुन्छन् । यसलाई खोलेर हेरियो भने दायाँ चित्रमा देखाए जस्तै घनको जाली बन्छ ।
दायाँ चित्रमा देखाइएको बाहेकको घनको जाली तल दिइएको छ । उक्त जालीको प्रयोग गरी बनाइएको घन पनि सँगै राखिएको छ ।


घनको जाली


घनको जाली


घन

(ख) षड्मुखा (Cuboid)

क्रियाकलाप 6

कागज पट्याएर बनाइएको षड्मुखाको चित्र दिइएको छ । यसका आधारमा सोधिएका प्रश्नमा समूहमा छलफल गर्नुहोस् :

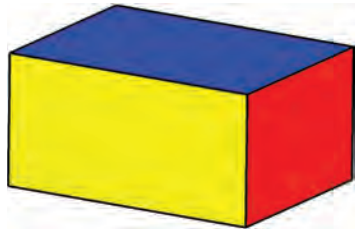
(अ) षड्मुखाका कतिओटा सतह, किनारा र शीर्षबिन्दुहरू छन् ?

(आ) यसलाई खोलेर हेरियो भने कस्तो देखिन्छ होला ?

(इ) घन र षड्मुखाको जालीमा के फरक रहेछ ?

(ई) षड्मुखा बनाउने योबाहेक अरू पनि जाली हुन्छन्, खोज्नुहोस् ।

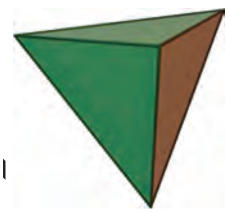
(उ) उक्त षड्मुखको जालीबाट षड्मुखा निर्माण गर्नुहोस् ।



(ग) टेट्राहेड्रन (Tetrahedron)

क्रियाकलाप 7

कागज पट्याएर बनाइएको टेट्राहेड्रनको चित्र दिइएको छ । यसका आधारमा सोधिएका प्रश्न समूहमा छलफल गर्नुहोस् :

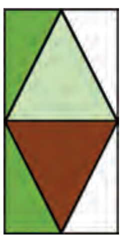


(अ) टेट्राहेड्रनका कतिओटा सतह, किनारा र शीर्षबिन्दुहरू छन् ?

(आ) यसलाई खोलेर हेरियो भने कस्तो देखिन्छ होला ?

(इ) टेट्राहेड्रन बनाउने योबाहेक अरू पनि जाली हुन्छन्, खोज्नुहोस् ।

(ई) उक्त टेट्राहेड्रनको जालीबाट टेट्राहेड्रन निर्माण गर्नुहोस् ।



(घ) सोली (Cone)

क्रियाकलाप 8

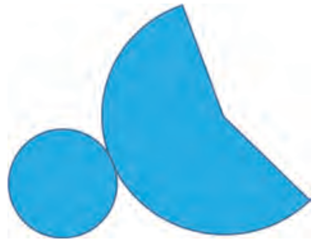
कागज पट्याएर बनाइएको ठोस सोलीको चित्र दिइएको छ । यसका आधारमा सोधिएका प्रश्नहरूमा समूहमा छलफल गर्नुहोस् :

(अ) सोलीलाई परिभाषित गर्नुहोस् । सोलीका कतिओटा सतह, किनारा र शीर्षबिन्दुहरू छन् ?

(आ) यसलाई खोलेर हेरियो भने कस्तो देखिन्छ होला ?

(इ) सोली बनाउने योबाहेक अरू पनि जाली हुन्छन्, खोज्नुहोस् ।

(ई) उक्त सोलीको जालीबाट सोलीको निर्माण गर्नुहोस् ।



(ङ) बेलना (Cylinder)

क्रियाकलाप 8

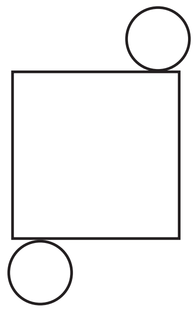
ब्याडमिन्टनको कर्क राख्ने खोलको चित्र दिइएको छ । यो बेलनाको नमुना हो । यसका आधारमा सोधिएका प्रश्नमा समूहमा छलफल गर्नुहोस् ।

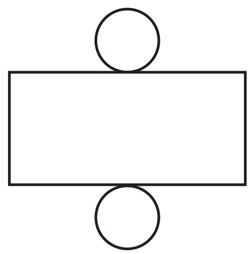
(अ) बेलनालाई परिभाषित गर्नुहोस् । बेलनाका कतिओटा सतह, किनारा र शीर्षबिन्दुहरू छन् ?

(आ) यसका सबै भागलाई कागजले पुरै ढाक्ने गरी टाँसेर पुनः निकाल्ने हो भने कस्तो देखिन्छ होला ?

(इ) बेलना बनाउने योबाहेक अरू पनि जाली हुन्छन्, खोज्नुहोस् ।

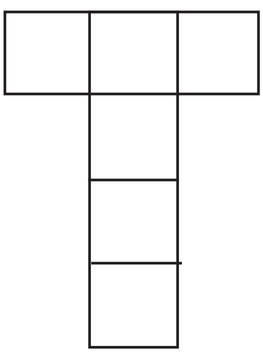
(ई) उक्त बेलनाको जालीबाट बेलनाको निर्माण गर्नुहोस् ।

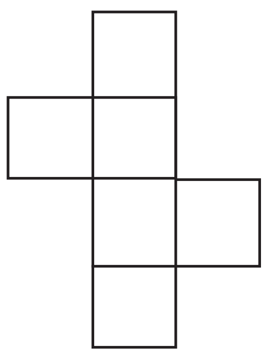


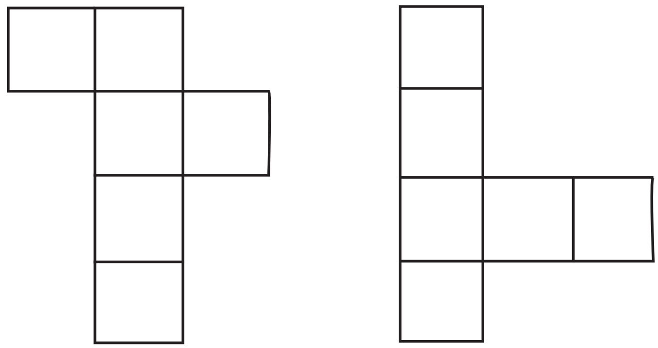


अभ्यास 16

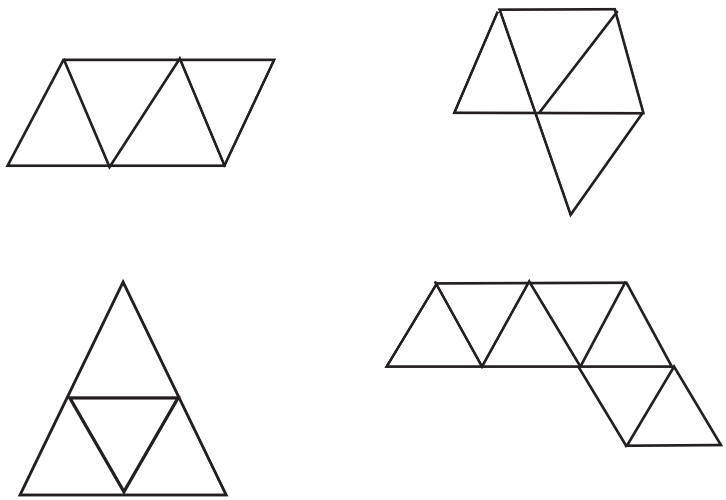
1. दिइएका जालीहरूमध्ये कुन कुन जालीले घन बन्छ, परीक्षण गर्नुहोस् :







2. दिइएका जालीहरूमध्ये कुन कुन जालीले टेट्राहेड्रन बन्छ, परीक्षण गर्नुहोस् :



परियोजना कार्य

(क) जुस पाइप वा सिन्का वा गहुँको छ्वालीबाट त्रिभुजाकार प्रिज्म र पिरामिड बनाई कक्षाकोठामा प्रस्तुत गर्नुहोस् ।

(ख) घन र षड्मुखाको जाली बनाई घन र षड्मुखा बनाउनुहोस् । यिनीहरूको जालीमा के फरक र समानता पाउनु भयो चार्टपेपरमा लेखी घन र षड्मुखालाई कक्षाकोठामा प्रदर्शन गर्नुहोस् ।

(ग) बेलना, सोली र टेट्राहेड्रनको ठोस नमुना बनाई कक्षाकोठामा प्रदर्शन गर्नुहोस् ।

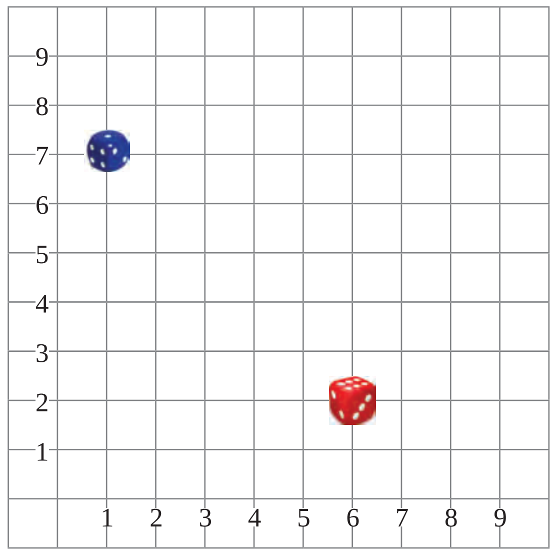
उत्तर शिक्षकलाई देखाउनुहोस् ।

पाठ 17

निर्देशाङ्कहरू (Coordinates)

17.0 पुनरवलोकन (Review)

एउटा रातो डाइस र एउटा निलो डाइस लिनुहोस् । चित्रमा देखाएको जस्तो ग्राफबोर्ड बनाउनुहोस् :
यो खेल जोडीमा खेल्नुहोस् ।
पहिलो खेलाडीले दुवै डाइस उफार्नुहोस् । रातो डाइसले देखाएको सङ्ख्या तेर्सो रेखामा र निलो डाइसले देखाएको सङ्ख्या ठाडो रेखामा हुने गरी क्रमशः ठाडो र तेर्सो रेखाहरू मिल्ने बिन्दुलाई कुनै चिह्न लगाउनुहोस् । फेरि अर्को पल्ट दुवै डाइसहरू रोल गरी अर्को बिन्दु निकाल्नुहोस् । यी दुवै बिन्दुलाई एउटा सिधा रेखाले जोड्नुहोस् ।



दोस्रो खेलाडीले पनि दुवै डाइस उफार्नुहोस् । रातो डाइसले देखाएको सङ्ख्या तेर्सो रेखामा र निलो डाइसले देखाएको सङ्ख्या ठाडो रेखामा हुने गरी क्रमशः ठाडो र तेर्सो रेखाहरू मिल्ने बिन्दुलाई कुनै चिह्न लगाउनुहोस् । फेरि अर्को पल्ट दुवै डाइसहरू उफारी अर्को बिन्दु निकाल्नुहोस् । यी दुवै बिन्दुहरूलाई एउटा सिधा रेखाले जोडनुहोस् ।

दुवै रेखाहरूमध्ये जसको लामो रेखा बनेको छ उसले 2 अङ्क र बराबर भएमा दुवैले 1/1 अङ्क पाउँछन् । यो खेल 5 पल्ट खेल्नुहोस् र 5 पल्टमा सबभन्दा बढी कसले अङ्क प्राप्त गऱ्यो ऊ नै विजयी हुन्छ ।

खेलपछि ४-५ जनाको समूहमा बसी निम्नलिखित प्रश्नको उत्तर पनि छलफल गर्नुहोस् :

(क) XOX' लाई के भनिन्छ ?

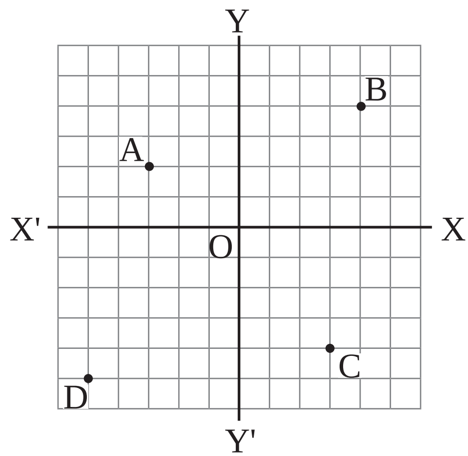
(ख) YOY' लाई के भनिन्छ ?

(ग) बिन्दु O बाट बिन्दु B मा पुग्न कति एकाइ दायाँ गएर कति एकाइ माथि जानुपर्छ ?

(घ) बिन्दु O, A, B, C र D का निर्देशाङ्कहरू के के हुन् ?

(ङ) बिन्दु (5, -5) लाई लेखाचित्रमा अङ्कन गर्नुहोस् ।

यसरी X-अक्षा, Y-अक्ष बिन्दुहरूको निर्देशाङ्क पत्ता लगाउनुहोस् ।



17.1 दुई बिन्दुबिचको दुरी (Distance between Two Points)

क्रियाकलाप 1

$A(x_1, y_1)$ र $B(x_2, y_2)$ दुई बिन्दुहरू छन् । यी दुई बिन्दुहरूको दुरी कसरी निकाल्ने

चित्रमा XOX' र YoY' क्रमश: X - अक्ष र Y - अक्ष हुन् । $A(x_1, y_1)$ र $B(x_2, y_2)$ दुईओटा बिन्दुहरू लिऔँ

अब $AP \perp OX$, $BQ \perp OX$ र $AC \perp BQ$ खिचौँ ।

$\therefore$ $OP = x_1$, $AP = y_1$,

$OQ = x_2$, $BQ = y_2$, $(x_1\ y_1)$

$CQ = AP = y_1$,

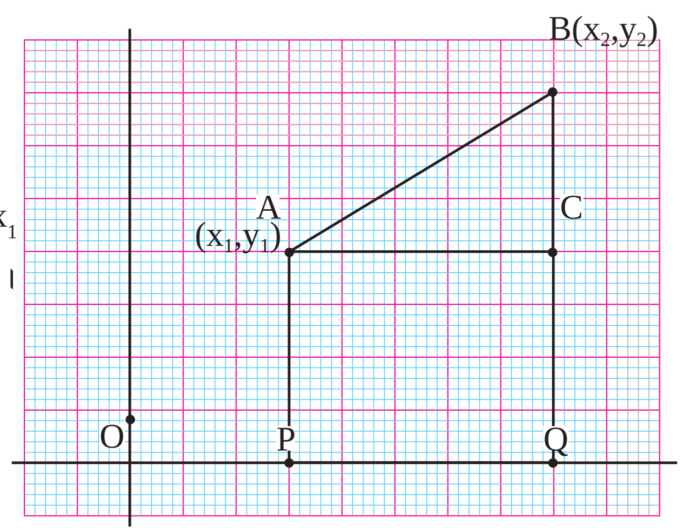
$AC = PQ = OQ – OP = x_2 – x_1$

$BC = BQ – CQ = y_2 – y_1$ हुन्छ ।

अब समकोण त्रिभुज ACB मा,

पाइथागोरस साध्यअनुसार

$$AB^2 = AC^2 + BC^2$$
$$= (x_2 – x_1)^2 + (y_2 – y_1)^2$$

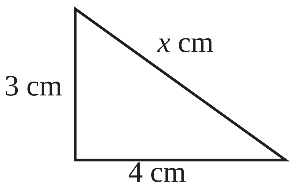


अत: दुई बिन्दु A र B बिचको दुरी $= AB = \sqrt{(x_2 – x_1)^2 + (y_2 – y_1)^2}$

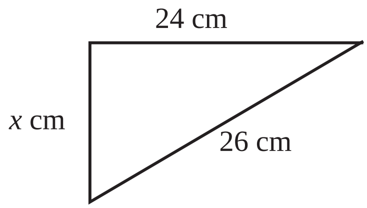
उदाहरण 1

दिइएका चित्रहरूमा x को मान पत्ता लगाउनुहोस् :

(क)



(ख)



समाधान

(क) यहाँ p = 3cm, b = 4cm,
h = x = ?

अब हामीलाई थाहा छ,

पाइथागोरस साध्यअनुसार,

$h^2 = p^2 + b^2$ हुन्छ ।

अथवा $x^2 = 3^2 + 4^2$

अथवा $x^2 = 9 + 16$

अथवा $x^2 = 25$

अथवा $x = \sqrt{25}$ cm=5 cm

$\therefore x = 5$ cm

(ख) यहाँ p = 24 cm, b = x = ?,
h = 26 cm

पाइथागोरस साध्यअनुसार, $h^2 = p^2 + b^2$

अथवा $26^2 = 24^2 – x^2$

अथवा $x^2 = (26^2 – 24^2)$

अथवा $x^2 = (676 – 576)$

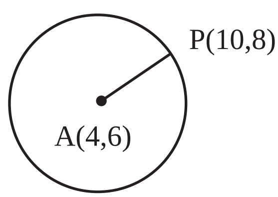
अथवा $x^2 = 100$

$\therefore x = 10$ cm

उदाहरण 2

यदि एउटा वृत्तको केन्द्र A(4,6) छ र उक्त वृत्तको परिधिको बिन्दु P(10,8) छ भने वृत्तको अर्धव्यास कति होला ?

समाधान



यहाँ A केन्द्र भएको एउटा वृत्त छ जसमा केन्द्र A(4,6) छ र परिधिको बिन्दु P(10,8) छ ।

अत: $x_1 = 4, x_2 = 10, y_1 = 6$ र $y_2 = 8$ छ । AP = ?

अब $AP = \sqrt{(x_2 – x_1)^2 + (y_2 – y_1)^2}$ एकाइ

$= \sqrt{(10 – 4)^2 + (8-6)^2}$

$= \sqrt{(6^2 + 2^2)} = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}$ एकाइ

उदाहरण 3

X - अक्षको छ एकाइमा बिन्दु P र Y-अक्षको 6 एकाइमा Q बिन्दु भए P देखि Q सम्मको दुरी कति होला ?

X - अक्षको 5 एकाइमा बिन्दु P र Y-अक्षको 6 एकाइमा Q बिन्दु भए P देखि Q सम्मको दुरी कति होला ?

समाधान

यहाँ A बिन्दु X- अक्षमा छ एकाइ छ । तसर्थ P(5, 0) हो । फेरी Q बिन्दु Y-अक्षमा 6 एकाइ छ । तसर्थ Q(0, 6) हो । (किनकि X- अक्षमा y = 0 र Y-अक्षमा $x = 0$ हुन्छ ।

अब, $(x_2, x_1) = (5, 0)$ र $(y_2, y_1) = (0, 6)$

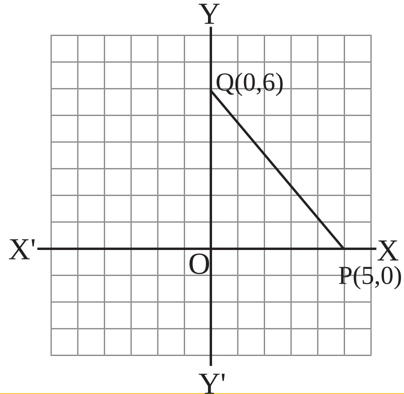
हामीलाई थाहा छ,

$$PQ = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \text{ एकाइ}$$

$$= \sqrt{(0 - 5)^2 + (6 - 0)^2}$$

$$= \sqrt{(25 + 36)} = \sqrt{61}$$

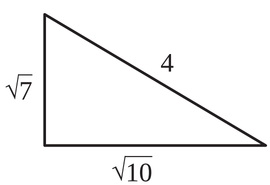
P देखि Q सम्मको दुरी $\sqrt{61}$ एकाइ छ ।



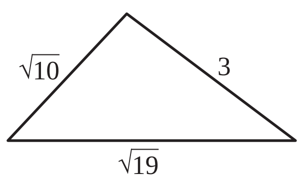
अभ्यास 17.1

1. **पाइथागोरस साध्य प्रयोग गरेर तलका त्रिभुजहरू समाकोणी हुन् वा होइनन् जाँचेर हेर्नुहोस् :**

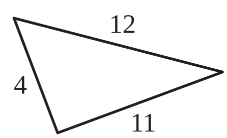
(क)



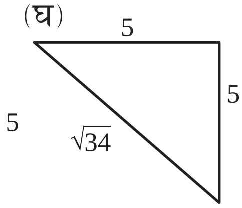
(ख)



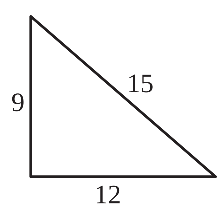
(ग)



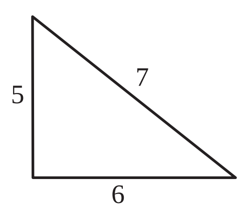
(घ)



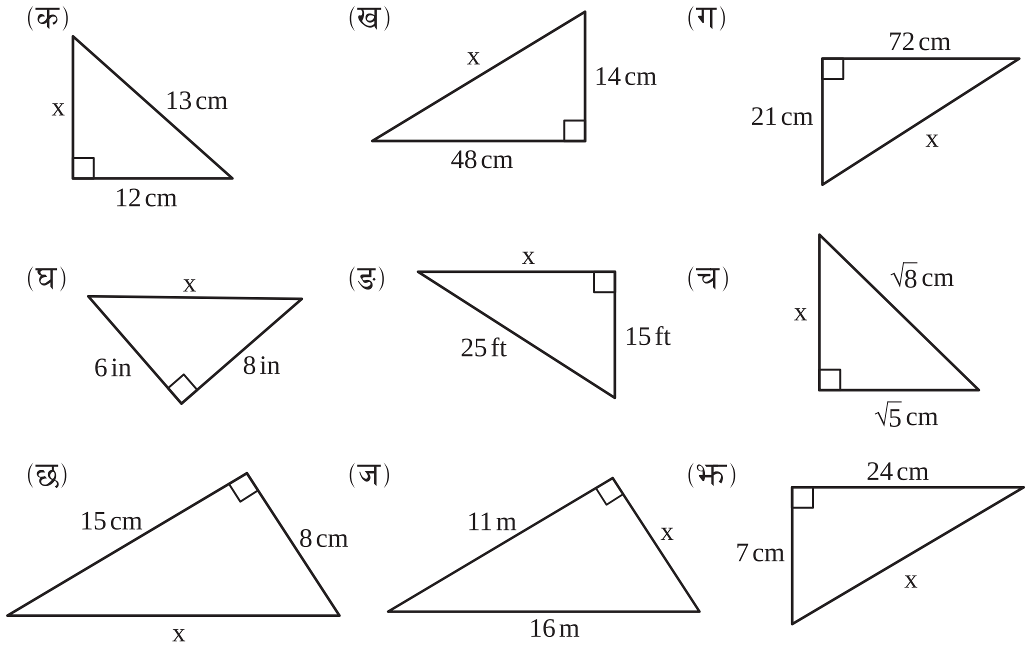
(ङ)



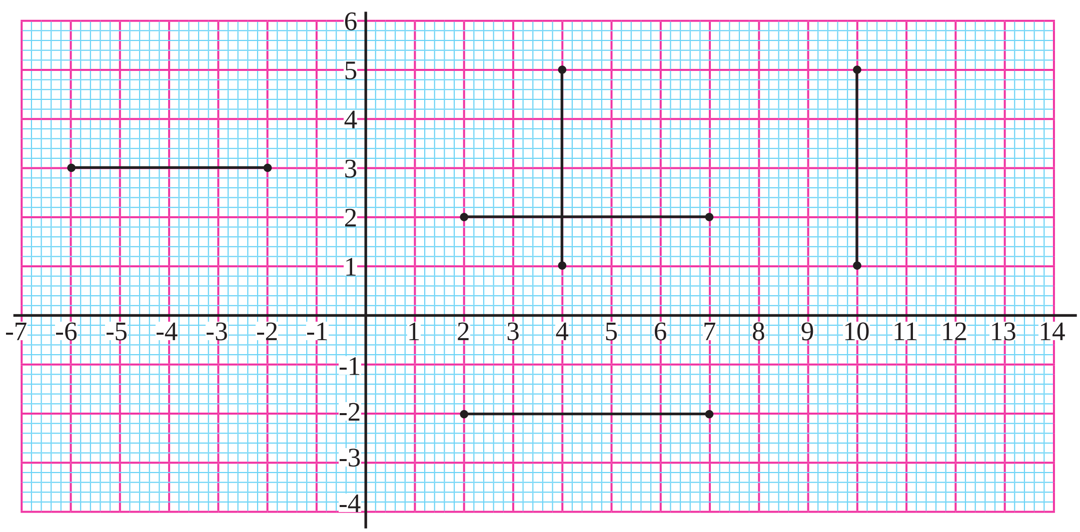
(च)



2. तलका समकोणी त्रिभुजहरूमा x को मान पत्ता लगाउनुहोस् :



3. दिइएका दुई बिन्दुहरूबिचको दुरी पत्ता लगाउनुहोस् :



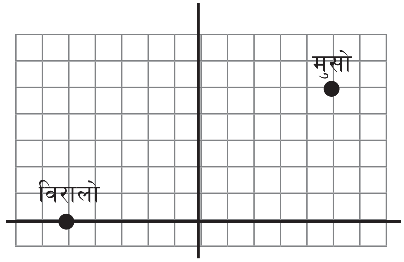
4. **दिइएका बिन्दुहरूबिचको दुरी पत्ता लगाउनुहोस् :**

(क) (4,-7) र (-1,5) (ख) (-3,4) र (4,3) (ग) (1,-2) र (5,-6)

(घ) (1,7) र (1,1) (ङ) (2,7) र (4,9) (च) (-8,7) र (-3,4)

5. **यदि बिन्दु A ले X-अक्षमा -8 मा र बिन्दु B ले Y-अक्षमा 6 मा काटेको छ भने AB को दुरी पत्ता लगाउनुहोस् ।**

6. **दिइएको ग्राफ पेपरमा बिरालो र मुसाको स्थिति दिइएको छ । बिरालो र मुसा भएको बिन्दुको निर्देशाङ्क पत्ता लगाउनुहोस् र तिनीहरू बिचको दुरी निकाल्नुहोस् ।**



7. **बिन्दुहरू** A(-4, 0), B(-4, -4), C(2, -4) **र** D(2, 0) **आयतका शीर्षबिन्दुहरू हुन् भनी प्रमाणित गर्नुहोस् ।**
8. **नक्सामा प्रस्तुत गर्दा वालिङ र काठमाडौँका निर्देशाङ्क बिन्दुहरू क्रमशः** (4, 7) **र** (7, 3) **भए त्यो बिन्दुबिचको नक्सामा दुरी कति होला ? यदि** 1 **एकाइ बराबर** 55km **भए वालिङ र काठमाडौँबिचको वास्तविक दुरी पत्ता लगाउनुहोस् ।**
9. **बिन्दुहरू** P(1, 6), Q(4, 1) **र** R(-4, 3) **विषमभुज त्रिभुजका शीर्षबिन्दुहरू हुन् भनी प्रमाणित गर्नुहोस् ।**
10. **यदि बिन्दुहरू** A(2, -1), B(3, 4), C(-2, 3) **र** D(-3, -2) **समबाहु चतुर्भुज** ABCD **का शीर्षबिन्दुहरू हुन् भने यसका विकर्णहरू** AC **र** BD **को दुरी पत्ता लगाउनुहोस् ।**
11. **यदि बिन्दु** P(9, 12), **बिन्दु** Q(1, 6) **केन्द्र भएको वृत्तको परिधिमा पर्छ भने उक्त वृत्तको अर्धव्यास कति होला ? के बिन्दु** (-7, 0) **उक्त वृत्तको परिधिमा पर्छ ?**
12. **उद्गम बिन्दु** O **बाट बिन्दु** A **र बिन्दु** B **को दुरी पत्ता लगाउनुहोस् जहाँ** A = (-7, 7) **र** B = (7, -7) **छ ।**
13. **यदि** P(0, 6) **र** Q(a, 0) **बिचको दुरी** 6 **एकाइ भए** a **को मान कति होला ?**

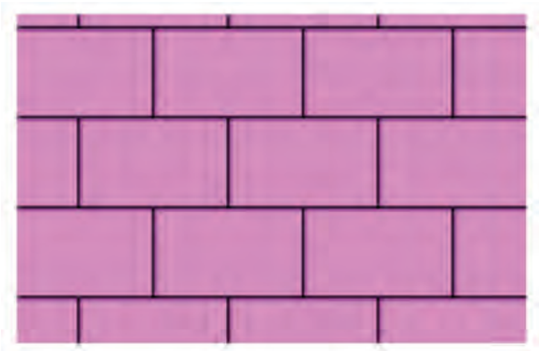
उत्तर : शिक्षकलाई देखाउनुहोस् ।

पाठ 18 टेसेलेसन
(Tessellation)

18.0 पुनरवलोकन (Review)

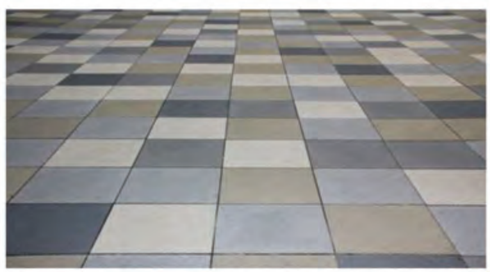
क्रियाकलाप 1

दिइएका चित्रहरूको अवलोकन गर्नुहोस् । के तपाईंको घर वरपर यस्ता आकृतिहरू देख्नुभएको छ ? ती आकृतिहरू कहाँ कहाँ देख्नुभएको छ ? जोडीमा बसी साथीसँग छलफल गर्नुहोस् ।

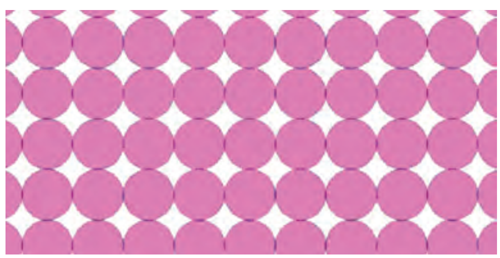


चित्र (क)

चित्र (ख)



चित्र (ग)



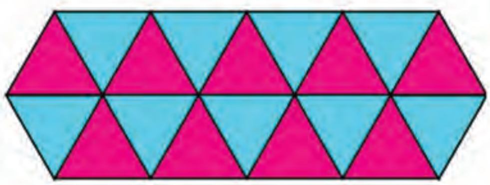
चित्र (घ)

माथिका चित्रहरूमा आकृतिहरू कसरी बनाइएका छन् ? कुन कुन टेसेलेसनका हुन् र कुन कुन होइनन्, छुट्याउनुहोस् ।

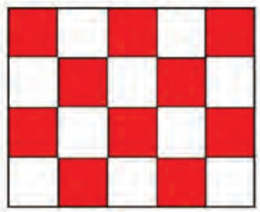
18.1 नियमित टेसेलेसन (Regular Tessellation)

क्रियाकलाप 1

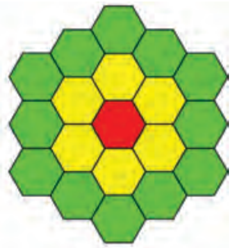
तल चित्रमा समबाहु त्रिभुज, वर्ग र नियमित षड्भुजहरूले बनेका टेसेलेसनहरूका चित्र दिइएको छ । ती टेसेलेसनहरूको अवलोकन गर्नुहोस् र रङ्गीन कागजबाट समबाहु त्रिभुजका विभिन्न टुक्रा, वर्गका विभिन्न टुक्रा तथा नियमित षड्भुजका विभिन्न टुक्रा बनाई ती टुक्रालाई तीनओटा फरक फरक चार्टपेपरहरूमा खाली ठाउँ नरहने गरी र नखप्टिने गरी टाँसी चित्रमा देखाइए जस्तै टेसेलेसनहरू निर्माण गर्नुहोस् । अब तपाईंले निर्माण गरेका टेसेलेसनहरू कस्ता टेसेलेसन हुन् साथीसँग छलफल गरी निष्कर्ष कक्षामा प्रस्तुत गर्नुहोस् ।



चित्र (क)



चित्र (ख)



चित्र (ग)

माथिका टेसेलेसनहरू नियमित बहुभुजहरूबाट बनेका टेसेलेसनहरू हुन् । टेसेलेसनलाई अङ्कहरूको प्रयोग गरी नामकरण गर्न सकिन्छ, जस्तै चित्र (क) मा समबाहु त्रिभुजहरू मिलाएर टेसेलेसन बनाइएको छ । यो टेसेलेसनलाई 3.3.3.3.3.3 भनिन्छ । त्यस्तै चित्र (ख) मा वर्गहरू मिलाएर टेसेलेसन बनाइएको देखिन्छ । यो टेसेलेसनको नामकरण 4.4.4.4 टेसेलेसनले गरिन्छ । त्यसै गरी चित्र (ग) मा नियमित षड्भुज मिलाएर टेसेलेसन बनाइएको देखिन्छ । यो टेसेलेसनको नामकरण 6.6.6 टेसेलेसनले गरिन्छ ।

यहाँ,

टेसेलेसनको नामकरण गर्नका लागि बहुभुजहरू जोडिएको एउटा कुनै बिन्दु लिनुहोस् र ती बिन्दुमा कुना जोडिएका सबै बहुभुजहरूको भुजाको सङ्ख्याका आधारमा क्रमश : सानोदेखि ठूलोसम्म लेख्नुहोस् । प्रत्येक बहुभुजको भुजाको सङ्ख्याको पछाडि (.) चिह्न राख्नुहोस् ।

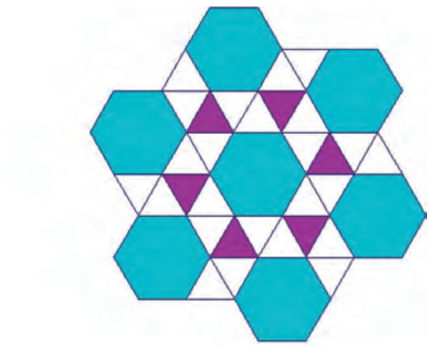
उस्तै नियमित बहुभुज (Regular Polygon) प्रयोग गरी बनेका टेसेलेसनलाई नियमित टेसेलेसन (Regular Tessellation) भनिन्छ, जस्तैः समबाहु त्रिभुज, वर्गको प्रयोग गरी बनेका टेसेलेसनहरू ।

18.2 अर्ध नियमित टेसेलेसन (Semi-regular Tessellation)

क्रियाकलाप 2

दिइएका चित्रमा देखाए जस्तो समबाहु त्रिभुज र वर्ग मिलाएर तथा नियमित षड्भुज र समबाहु त्रिभुजबाट टेसेलेसन बनाउनुहोस् । अब तपाईंले बनाएका टेसेलेसनहरू कस्ता टेसेलेसनहरू हुन् र तिनीहरूको नामकरण कसरी गरिन्छ, होला सँगैको साथीसँग छलफल गरी निष्कर्ष कक्षामा प्रस्तुत गर्नुहोस् ।

चित्र (क)



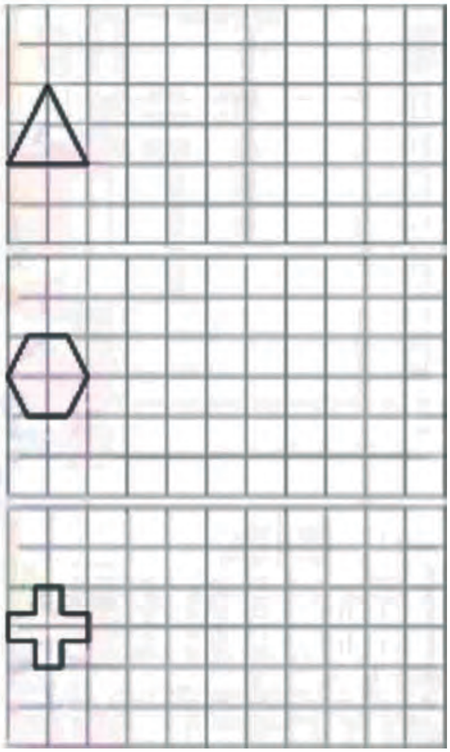
चित्र (ख)

माथिका टेसेलेसनहरू अर्ध नियमित टेसेलेसनहरू हुन् । यहाँ चित्र (क) मा प्रत्येक कुनाको नामकरण ३.३.४.३.४ हो । त्यसै गरी चित्र (ख) को टेसेलेसन ३.३.३.३.६ टेसेलेसन हो ।

दुई वा दुईभन्दा बढी नियमित बहुभुजहरू प्रयोग गरी बनेका टेसेलेसनलाई अर्ध नियमित टेसेलेसन (Semi-regular Tessellation) भनिन्छ, जस्तै : समबाहु त्रिभुज र वर्ग, समबाहु त्रिभुज र नियमित षड्भुजको प्रयोग गरी बनेका टेसेलेसनहरू ।

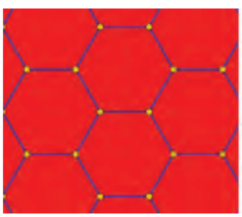
अभ्यास 18.1

1. दिइएको ग्राफमा टेसेलेसन भर्नुहोस् :

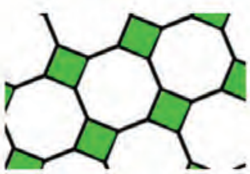


2. निम्नलिखित नियमित र अर्ध नियमित टेसेलेसनमा २-३ राउन्ड टेसेलेसन थप्नुहोस् :

(क)



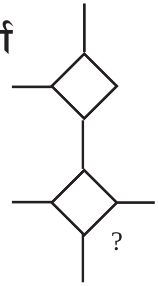
(ख)



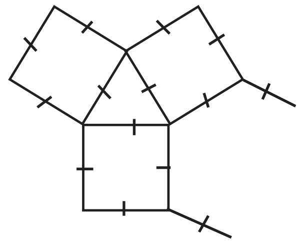
(ग)

3. माथि प्रश्न (२) मा भएका टेसेलेसनको अङ्क प्रयोग गरी नामकरण गर्नुहोस् ।

4. सँगैको चित्र एउटा अर्धनियमित टेसेलेसनको हो जसमा एउटा वर्ग र अर्को एक नियमित बहुभुज मिलाइएको हो । त्यो नियमित बहुभुजको नाम के हो ? उक्त नियमित बहुभुजको प्रयोग गरी टेसेलेसन बनाउनुहोस् ।



5. दिइएको चित्रमा तीनओटा नियमित बहुभुज मिलाएर बनेको टेसेलेसनको हो । जसमा एक समबाहु त्रिभुज, दोस्रो वर्ग छ भने तेस्रो नियमित बहुभुजको नाम के हो ? उक्त बहुभुजको सहायताले टेसेलेसन बनाएर हेर्नुहोस् ।



परियोजना कार्य (Project Work on Mini-exhibition)

कक्षाका सबै विद्यार्थी ११ समूहमा बाडिनुहोस् । प्रत्येक समूहले बाक्लो पेपरको प्रयोग गरी निम्नलिखित मध्ये कुनै एक टेसेलेसन बनाउनुहोस् । टेसेलेसनको मिनी प्रदर्शनी आयोजना गर्नुहोस् । विद्यालयका सबै विद्यार्थीलाई बोलाएर प्रदर्शनी अवलोकन गराउनुहोस् ।

(क) ३.३.३.३.३.३ (ख) ४.४.४.४ (ग) ६.६.६ (घ) ३.३.३.३.६

(ङ) ३.३.३.४.४ (च) ३.३.४.३.४ (छ) ३.४.६.४ (ज) ३.६.३.६

(झ) ३.१२.१२ (ञ) ४.६.१२ (ट) ४.८.८

उत्तर

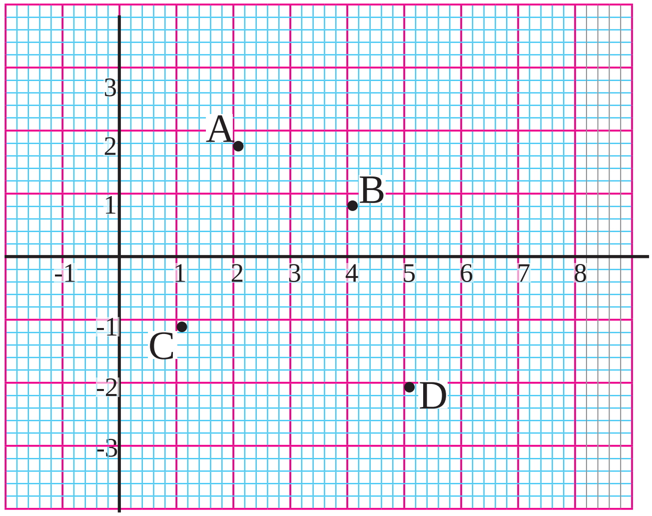
शिक्षकलाई देखाउनुहोस् ।

पाठ 19

स्थानान्तरण (Transformation)

19.0 पुनरवलोकन (Review)

बिन्दुहरू A, B, C, D र E लाई तल ग्राफमा देखाइएको छ :

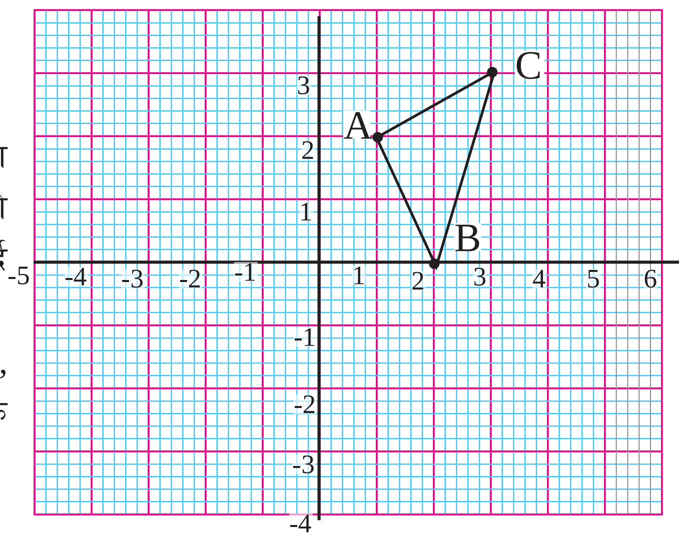


(क) बिन्दु A, B, C र D को निर्देशाङ्क कति कति हुन्छ ?

(ख) बिन्दु A, B, C र D लाई X - अक्षमा परावर्तन गरेपछि बन्ने प्रतिबिम्ब A`, B`, C` र D` को निर्देशाङ्क लेख्नुहोस् ।

(ग) बिन्दु A, B, C र D लाई Y - अक्षमा परावर्तन गर्दा बन्ने प्रतिबिम्बको निर्देशाङ्क कति कति हुन्छ ।

19.1 परावर्तन (Reflection)



क्रियाकलाप 1

सँगैको चित्रमा ग्राफ पेपरमा ΔABC दिइएको छ । दिइएको निर्देशनअनुसार क्रियाकलाप गर्दै जानुहोस् ।

(क) ΔABC मा शीर्षबिन्दु A, B र C को निर्देशाङ्क लेख्नुहोस् ।

(ख) शीर्षबिन्दु A, B र C लाई X– अक्षमा परावर्तन गर्नुहोस् ।

(ग) प्रतिविम्बको A', B' र C' को निर्देशाङ्क लेख्नुहोस् ।

(घ) अब ΔABC का शीर्षबिन्दुको निर्देशाङ्क र प्रतिबिम्ब ΔA'B'C' को निर्देशाङ्को तुलना गरी निष्कर्ष लेख्नुहोस् ।

यहाँ ΔABC मा A(1, 2), B(2, 0) र C(3, 3) छ । परावर्तनपश्चात् प्रतिबिम्ब A'(1, -2) B'(2, 0) र C'(3, -3) भयो ।

ΔABC लाई X–अक्षमा परावर्तन गर्दा, शीर्षबिन्दु A, B र C को परावर्तनपश्चात् को निर्देशाङ्कमा *x* निर्देशाङ्क उही र y निर्देशाङ्कमा चिह्न परिवर्तन हुने रहेछ । X–अक्षमा नै रहेको बिन्दुको X–अक्षसँग परावर्तन गर्दा निर्देशाङ्क उही रहन्छन् ।

क्रियाकलाप 2

दुई जनाको समूहमा बसी तलका क्रियाकलाप गर्नुहोस् :

(क) क्रियाकलाप 1 को ग्राफमा भएको ΔABC लाई Y–अक्षमा परावर्तन गर्नुहोस् ।

(ख) प्रतिबिम्ब A", B" र C" को निर्देशाङ्क लेख्नुहोस् ।

(ग) अब ΔABC र प्रतिबिम्ब ΔA"B"C" को निर्देशाङ्क तुलना गरी निष्कर्ष निकाल्नुहोस् ।

यहाँ ΔABC मा A(1, 2), B(2, 0) र C(3, 3) छ ।

परावर्तनपश्चात् प्रतिबिम्ब A"(-1, 2), B(-2, 0) र C"(-3, 3) भयो ।

ΔABC लाई Y – अक्षमा परावर्तन गर्दा, शीर्षबिन्दु D, B र C को परावर्तनपश्चात् को निर्देशाङ्कमा *x* निर्देशाङ्कमा चिह्न परिवर्तन हुने रहेछ भने y निर्देशाङ्क उही हुने रहेछ ।

विचारणीय प्रश्न : यदि त्रिभुजको एउटा शीर्षबिन्दु Y– अक्षमा भएको भए त्यसको y अक्षमा परावर्तन गर्दा बन्ने प्रतिविम्बको निर्देशाङ्क के हुन्छ ?

उदाहरण 1

A (2, 2), B (4, 6) र C (6, 3) एउटा त्रिभुजका शीर्षबिन्दुहरू हुन् भने,

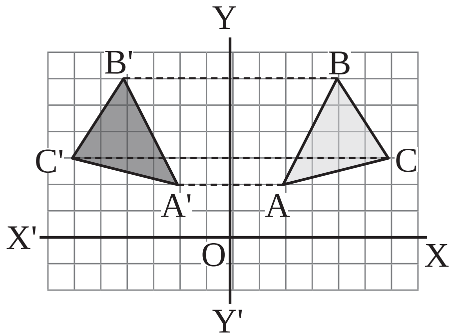
(क) ΔABC लाई लेखाचित्रमा प्रस्तुत गर्नुहोस् ।

(ख) उक्त ΔABC लाई Y अक्षमा परावर्तन गरी प्रतिबिम्ब ΔA'B'C' लाई लेखाचित्रमा देखाउनुहोस् ।

(ग) प्रतिबिम्ब ΔA'B'C' का निर्देशाङ्क लेख्नुहोस् ।

समाधान

यहाँ A (2, 2), B (4, 6) र C (6, 3) ΔABC का निर्देशाङ्क हुन् ।



(क) ΔABC का निर्देशाङ्कलाई दिइएको लेखाचित्रमा देखाइएको छ ।

(ख) प्रतिबिम्ब ΔA'B'C' लाई पनि सोही लेखाचित्रमा नै देखाइएको छ ।

(ग) प्रतिबिम्ब ΔA'B'C' का निर्देशाङ्कहरू A'(-2, 2), B' (-4, 6) C' (-6, 3) हुन् ।

अभ्यास 19.1

1. **लेखाचित्रको प्रयोग गरी दिइएका निर्देशाङ्कहरूलाई X - अक्षसँग परावर्तन गरी प्रतिबिम्बको निर्देशाङ्क लेख्नुहोस् ।**

(क) A (1, 2) (ख) M (–2, 3) (ग) C (4, –5) (घ) D (–6, 6)

(ङ) E (–5, –4) (च) F (–2, 5) (छ) G (9, –8) (ज) H (–3, –9)

(झ) I (–10, 12) (ञ) W (7, 8)

2. **प्रश्न न.** 2 **का बिन्दुहरूलाई** Y **अक्षबाट परावर्तन गरी ग्राफ पेपरमा लेख्नुहोस् ।**

3. **बिन्दु** P (5, –6) **लाई** Y **अक्षबाट परावर्तन गर्नुहोस् ।**

(क) P' को निर्देशाङ्क पत्ता लगाउनुहोस् ।

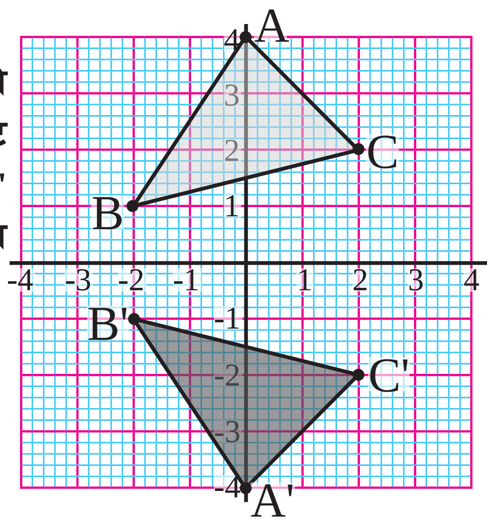
(ख) PP' को दुरी पत्ता लगाउनुहोस् ।

4. **P (4, 3), Q (7, 3) र R (4, –3) एउटा समकोण त्रिभुजका शीर्षबिन्दुहरू हुन् । उक्त त्रिभुजलाई लेखाचित्रमा अङ्कन गरी X - अक्षसँग परावर्तन गरी प्रतिबिम्बलाई लेखाचित्रमा प्रस्तुत गर्नुहोस् ।**

5. **A (2, –2), B (8, 3) र C (5, –2) एउटा त्रिभुजका शीर्षबिन्दुहरू हुन् । अब उक्त त्रिभुजलाई लेखाचित्रमा अङ्कन गरी Y - अक्षसँग परावर्तन गरी प्रतिबिम्बलाई लेखाचित्रमा प्रस्तुत गर्नुहोस् ।**

6. **A (–2, 3), B (-5, 2) र C (–4, 5) लाई लेखाचित्रमा अङ्कन गरी पहिले X - अक्षबाट परावर्तन गरी प्रतिबिम्ब ΔA'B'C' पत्ता लगाउनुहोस् । फेरि अन्तिम प्रतिबिम्बलाई ΔA'B'C' लाई Y - अक्षसँग परावर्तन गरी लेखाचित्रमा प्रस्तुत गर्नुहोस् ।**

7. **दिइएको ग्राफमा त्रिभुज ΔABC दिइएको ग्राफमा त्रिभुज ABC को X- अक्षबाट परावर्तन गर्दा हुने प्रतिबिम्ब A'B'C' दिइएको छ । प्रतिबिम्ब A'B'C' का निर्देशाङ्क पनि लेख्नुहोस् ।**



उत्तर :

1.(क) A' (1, –2) (ख) M' (–2, –3) (ग) C' (4, 5) (घ) D' (–6, –6)
(ङ) E' (–5, 4) (च) F' (–2, –5) (छ) G' (9, 8) (ज) H' (–3, 9)
(झ) I' (–10, –12) (ञ) W' (7, -8)

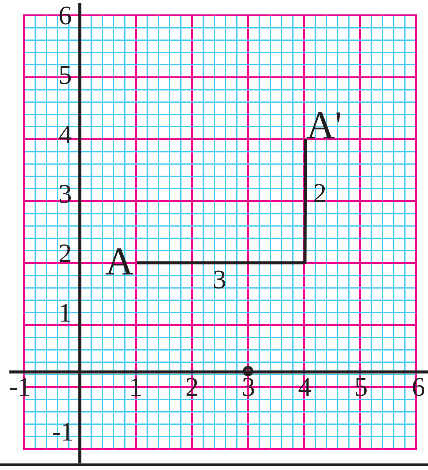
2. (क) A' (–1, 2) (ख) M' (2, 3) (ग) C' (–4, –5) (घ) D' (6, 6)
(ङ) E' (5, –4) (च) F' (2, 5) (छ) G' (–9, v8) (ज) H' (3, v9)
(झ) I' (10, 12) (ञ) W' (–7, 8)

3.(क) P' (–5, –6) (ख) 10

4 देखि 7 सम्म शिक्षकलाई देखाउनुहोस् ।

19.2 विस्थापन (Translation)

क्रियाकलाप 1



दिइएको चित्रमा बिन्दु A लाई बिन्दु A' मा विस्थापन गरिएको छ ।

विस्थापनको नियम 3 एकाइ दायाँ र 2 एकाइ माथि हो । यसलाई (3, 2) ले जनाइन्छ । A लाई 3 एकाइ दायाँ अनि 2 एकाइ माथि लगिएको छ । जसअनुसार A(1, 2) लाई A'(4, 4) मा विस्थापन गरियो ।

> कुनै पनि बिन्दु वा वस्तुलाई दिइएको दिशामा निश्चित दुरीमा सार्नु वा स्थानान्तरण गर्नुलाई विस्थापन (Translation) भनिन्छ । विस्थापनका लागि विस्थापनको परिमाण र दिशा उल्लेख गर्नु आवश्यक छ ।

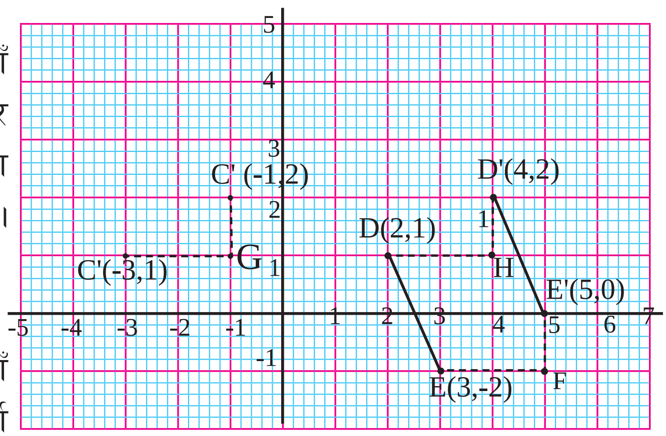
कुनै निर्देशाङ्कलाई दायाँ विस्थापन गर्दा +, बायाँ विस्थापन गर्दा -, माथि विस्थापन गर्दा + र तल विस्थापन गर्दा - लेखिन्छ ।

उदाहरण 1

(क) बिन्दु C लाई 2 एकाइ दायाँ र 1 एकाइ माथि विस्थापत गर्नुहोस् ।

(ख) रेखा DE लाई 2 एकाइ दायाँ र 1 एकाइ माथि विस्थापत गर्नुहोस् ।

समाधान

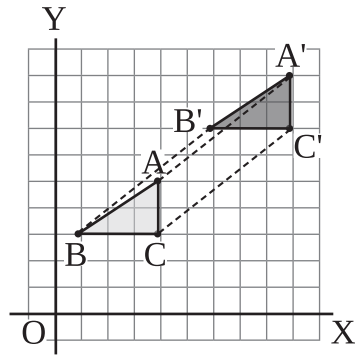


बिन्दु C(-3, 1) लाई 2 एकाइ दायाँ ल्याउदा बिन्दु G मा पुग्छ र त्यसलाई 1 एकाइ माथि लगदा बिन्दु C'(-1,2) मा पुग्दछ । जसलाई यसरी लेखिन्छ ।

C(-3,1) विस्थापन C`(-1, 2)

त्यस्तै D (2, 1) को 2 एकाइ दायाँ र 1 एकाइ माथिको विस्थापन गर्दा D'(4, 2) हुन्छ । E(3,-1) को 2 एकाइ दायाँ र 1 एकाइ माथि विस्थापन गर्दा E'(5, 0) हुन्छ । जसअनुसार D'E' रेखा DE को विस्थापन प्रतिबिम्ब भयो ।

उदाहरण 2



सँगैको चित्रमा ΔABC दिइएको छ र उक्त त्रिभुजलाई 5 एकाइ दायाँ र 4 एकाइ माथि विस्थापन गरी आकृति A'B'C' पुऱ्याइएको छ । अब उक्त आकृतिको निर्देशाङ्क लेख्नुहोस् ।

समाधान

अब ΔABC र $\Delta A'B'C'$ का शीर्ष बिन्दुहरूका निर्देशाङ्कहरू हेरौँ ।

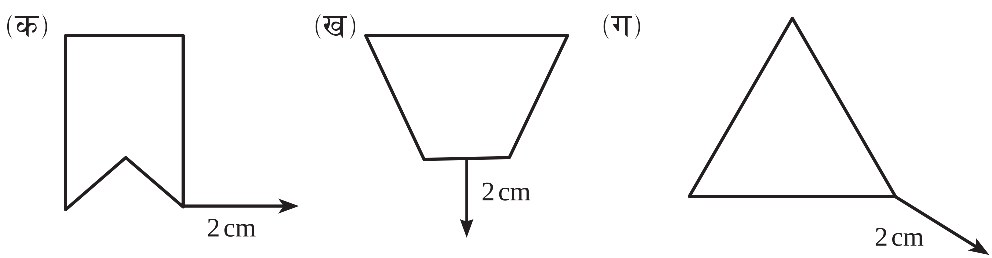
ΔABC	**ΔA'B'C'**
A(4,5)	A'(9,9)
B(1,3)	B'(6,7)
C(4,3)	C(9,7)

यहाँ विस्थापन अगाडि र विस्थापन पछाडिको x र y निर्देशाङ्क हेरौं ।

तीनओटै शीर्षबिन्दुहरूमा x को मानमा विस्थापनपछि 5 थपिएको छ । त्यस्तै y को मा(नमा पनि विस्थापन पछि 4 थपिएको छ । विस्थापनपछि प्रतिबिम्ब त्रिभुजलाई छायाँ पारी देखाइएको छ ।

अभ्यास 19.2

1. **दिइएका आकृतिलाई दिएको दिशा र परिमाणमा विस्थापन गर्नुहोस् :**



2. बिन्दु (4,-5) लाई लेखाचित्रमा अङ्कन गरी 3 एकाइ दायाँ र 4 एकाइ माथि विस्थापन गरी प्रस्तुत गर्नुहोस् ।

3. तलका निर्देशाङ्कहरूलाई लेखाचित्रमा अङ्कन गरी 3 एकाइ बायाँ र 3 एकाइ माथि विस्थापन गरी लेखाचित्रमा प्रस्तुत गर्नुहोस् :

(क) (4,9) (ख) (-3,6) (ग) (-2,2) (घ) (-5,5)

(ङ) (2,3) (च) (4,-7) (छ) (-4,8) (ज) (-5,-6)

4. P(-1,-3) र Q(4,5) लाई 2 एकाइ दायाँ र 3 एकाइ माथि विस्थापन गरी लेखाचित्रमा प्रस्तुत गर्नुहोस् ।

5. शीर्षबिन्दुहरू A(1,0), B(4,5) र C(7,-2) भएको ΔABC लाई लेखाचित्रमा अङ्कन गरी 3 एकाइ दायाँ र 5 एकाइ तल विस्थापन गरी लेखाचित्रमा प्रस्तुत गर्नुहोस् ।

6. बिन्दुहरू (4,6), (7,5), (5,1) र (2,2) भएको लाई लेखाचित्रमा अङ्कन गरी 4 एकाइ दायाँ र 5 एकाइ तल विस्थापन गरी लेखाचित्रमा प्रस्तुत गर्नुहोस् ।

7. A(4,1) लाई लेखाचित्रमा अङ्कन गरी 5 एकाइ दायाँ र 4 एकाइ माथि विस्थापन गर । फेरि उक्त प्रतिबिम्ब बिन्दुलाई 2 एकाइ दायाँ र 5 एकाइ तल विस्थापन गरी लेखाचित्रमा प्रस्तुत गर्नुहोस् ।

8. बिन्दु (-3,5) लाई कति एकाइमा विस्थापन गर्दा (4,5) बन्छ, लेखाचित्रमा देखाउनुहोस् ।

9. बिन्दु A(3,-2) लाई बिन्दु B(2,-1) मा विस्थापन गर्दा हुने विस्थापनको नाप लिई रेखा AB लाई विस्थापन गर्नुहोस् जहाँ, A(4,4) र B(-5, 7) छन् ।

परियोजना कार्य त्रिभुजको स्थान्तरण

1. विभिन्न किसिमका त्रिभुजहरू (समबाहु, समद्विबाहु, विसमबाहु, न्यूनकोणी, समकोणी र अधिककोणी) ग्राफपेपरमा बनाउनुहोस् ।
2. प्रत्येक त्रिभुजलाई x-axis र y-axis बाट परावर्तन गर्नुहोस् ।
3. प्रत्येक त्रिभुजलाई उद्गम बिन्दुलाई केन्द्र बनाई 90° धनात्मक र ऋणात्मक दुवै दिशामा परिक्रमण गर्नुहोस् ।
4. प्रत्येक त्रिभुजलाई 3 एकाइ दायाँ र 4 एकाइ माथि हुने गरी विस्थापित गर्नुहोस् ।
5. यो सबै कामको प्रस्तुतिका लागि तयार गर्नुहोस् ।
6. कक्षामा प्रस्तुत गर्नुहोस् ।

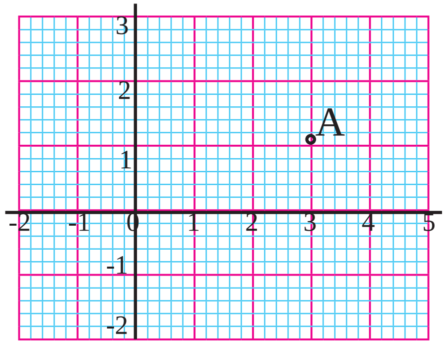
उत्तर : शिक्षकलाई देखाउनुहोस् ।

19.3 परिक्रमण (Rotation)

क्रियाकलाप 1

प्रत्येक विद्यार्थीलाई साना साना कागजका टुक्रा लिन लगाउनुहोस् । उक्त टुक्राहरूमा निम्नलिखित कोणहरू लेख्न लगाउनुहोस् ।

घडीको सुईको दिशातिर 45°, घडीको सुईको उल्टो दिशातिर 45°, घडीको सुईको दिशातिर 90°र घडीको सुईको उल्टो दिशातिर 90°



यो खेल 4 – 5 जनाको समूहमा खेल्नुहोस् । खेल सुरु गर्नुभन्दा अगाडि यी चिटहरूलाई पट्याएर एउटा बट्टामा राख्नुहोस् । बट्टा हल्लाएर राख्नुहोस् । एउटा धागाले इरेजरलाई बाध्नुहोस् । कापीको छेउमा एउटा बिन्दुमा धागो टाँस्नुहोस् । खेलको सुरुमा 0° बाट गरिन्छ । बट्टाबाट एउटा चिट नहेरीकन निकाल्नुहोस् । त्यो चिटमा लेखेबमोजिमले इरेजर घुमाउनुहोस् । त्यस्तै गरी 5 पल्टसम्म गर्नुहोस् । 5 पल्टमा पुग्दा जसको सबभन्दा ठुलो कोण हुन्छ, उही समूह विजयी हुन्छ ।

माथिका खेलका आधारमा परिक्रमणका लागि के के कुराहरू चाहिने रहेछ भन्ने कुरामा छलफल गर्नुहोस् र बुँदागत रूपमा प्रस्तुत गर्नुहोस् ।

परिक्रमणको लागि निम्नलिखित तीन कुराहरूको आवश्यक पर्दछ :

- परिक्रमणको केन्द्र (Centre of Rotation)
- परिक्रमणको कोण (Angle of Rotation)
- परिक्रमणको दिशा (Direction of Rotation)

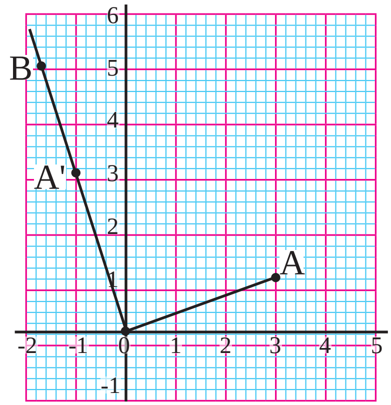
घडीको सुईको दिशालाई परिक्रमणको ऋणात्मक (Negative) दिशा र घडीको सुईको विपरीत दिशालाई परिक्रमणको धनात्मक (Positive) दिशा भनिन्छ ।

माथिको खेलमा, धागो टासेको बिन्दु परिक्रमणको केन्द्रबिन्दु हो । घुमाउनु पर्ने कोण (45^o, 90^o, वा 180^o) परिक्रमणको कोण र + अथवा - परिक्रमणको दिशा हुन् ।

क्रियाकलाप 2

दुई जनाको समूहमा बस्नुहोस् । A लाई उद्गम बिन्दु (0, 0) बाट 90° को कोणमा घडीको सुईको विपरीत दिशामा परिक्रमण कसरी गर्ने होला ? समूहमा छलफल गर्नुहोस् ।

निष्कर्ष यसप्रकार छ :



(क) परिक्रमणको केन्द्रबिन्दु O (0, 0) भएकाले A र O जोड्ने

(ख) O केन्द्रबिन्दुबाट घडीको विपरीत दिशामा 90° को कोण BOA बनाउने

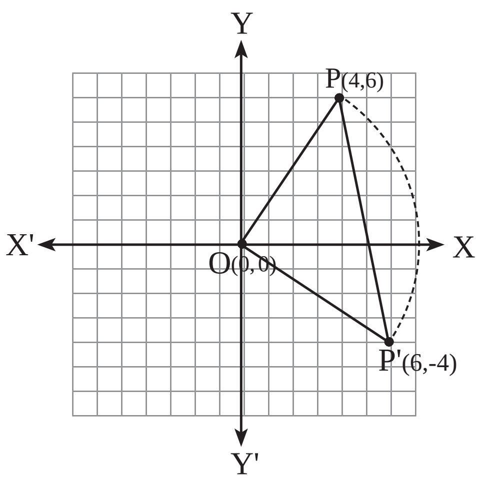
(ग) OA बराबरको चाप लिई OB रेखामा बिन्दु O बाट चापले काट्ने

(घ) काटिएको सो बिन्दुलाई A' ले जनाउने, A नै आवश्यक प्रतिबिम्ब हो ।

क्रियाकलाप 3

बिन्दु P (4, 5) लाई उद्गम बिन्दु O (0, 0) केन्द्र हुने गरी -90° को कोणमा परिक्रमण कसरी गर्ने होला ? समूहमा छलफल गर्नुहोस् ।

बिन्दु P (4, 6) लाई लेखाचित्रमा घडीको सुईको दिशामा वा ऋणात्मक दिशामा 90° परिक्रमण गराउँदा P (4, 6) बाट P' (6, –4) बनेको पाइयो । जसलाई ग्राफमा देखाउँदा,



(क) परिक्रमणको केन्द्र उद्गम बिन्दु O (0, 0) भएकाले P र O जोड्नुहोस् ।

(ख) परिक्रमणको कोण –90° भएकाले कोण O मा 90° को कोण बनाउनुहोस् ।

(ग) PO बराबरको चाप लिई –90° को कोण बनाएको रेखामा बिन्दु O बाट काट्नुहोस् ।

(घ) P(4, 6) को प्रतिबिम्ब P' (6,–4) भयो र $\angle POP' = 90°$ भयो ।
माथि बिन्दु P(4, 6) लाई +90° बाट परिक्रमण गराउँदा प्रतिबिम्ब कस्तो बन्छ, अनुमान गर्नुहोस् । तपाईंले गरेको अनुमान कति मिल्यो छलफल गर्नुहोस् ।

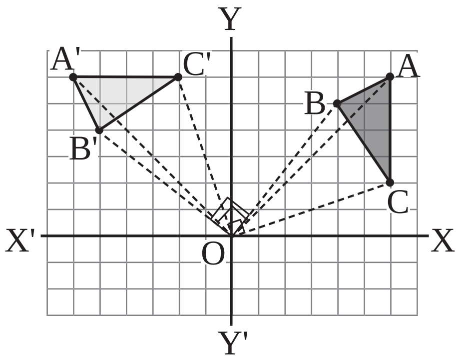
उदाहरण 1

शीर्षबिन्दुहरू A(6,6), B(4,5) र C(6,2) भएको एउटा त्रिभुजलाई लेखाचित्रमा प्रस्तुत गर्नुहोस् । उक्त त्रिभुजलाई उद्गम बिन्दु (0,0) बाट (क) 90° धनात्मक दिशामा र (ख) 180° मा परिक्रमण गर्नुहोस् ।

समाधान

यहाँ ΔABC का शीर्षबिन्दुहरू क्रमशः (6,6), (4,5) र (6,2) छन् ।

अब बिन्दुहरू A, B र C लाई क्रमशः 90° मा परिक्रमण गराउँदा बन्ने प्रतिबिम्ब त्रिभुजलाई लेखाचित्रमा छाया पारी देखाइएको छ ।



जहाँ,

A(6,6) ⟶ A'(-6,6), B(4,5) ⟶ B'(-5,4) र C(6,2) ⟶ C'(-2,6) हुन्छ ।

अभ्यास 19.3

1. तलका बिन्दुहरू ग्राफमा अङ्कन गर्नुहोस् र उद्गम बिन्दु केन्द्र हुने गरी 90° धनात्मक हुने गरी परिक्रमण गर्नुहोस् ।

(क) (-4,7) (ख) (4,-7) (ग) (5,9) (घ) (3,0) (ङ) (-4,-8)

(च) (2,-5) (छ) (10,-10) (ज) (0,6) (झ) (0,0) (ञ) (-9,-9)

2. तलका बिन्दुहरू ग्राफमा अङ्कन गर्नुहोस् र उदगम बिन्दु केन्द्र हुने गरी 90° ऋणात्मक हुने गरी परिक्रमण गर्नुहोस् :

(क) (-4,7) (ख) (4,-7) (ग) (5,9) (घ) (3,0) (ङ) (-4,-8)

(च) (2,-5) (छ) (10,-10) (ज) (0,6) (झ) (0,0) (ञ) (-9,-9)

3. माथि प्रश्न १ र २ मा कस्तो कस्तो सम्बन्ध देख्नुभयो ? सुत्रको रूपमा उल्लेख गर्नुहोस् ।

4. A(0,0), B(3,0), C(3,3) र D(0,3) शीर्षबिन्दुहरू भएको एउटा वर्गलाई लेखाचित्रमा खिची त्यसलाई उद्गम बिन्दु O(0,0) बाट (क) +90° र (ख) –90° मा परिक्रमण गराई लेखाचित्रमा प्रस्तुत गर्नुहोस् ।

5. **दिइएका शीर्षबिन्दुहरूबाट बन्ने ज्यामितीय आकृतिलाई लेखाचित्रमा अङ्कन गरी उद्गम बिन्दु O(0,0) बाट (क) +90° र (ख) –90° मा परिक्रमण गराई छुट्टाछुट्टै लेखाचित्रमा प्रस्तुत गर्नुहोस् :**

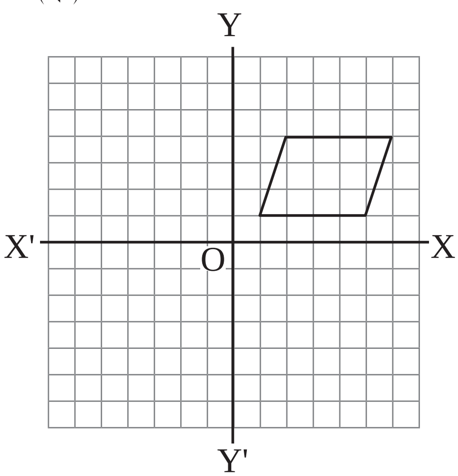
(i) (2,7), (3,3) र (6,7)

(ii) (3,2), (-2,2), (6,5) र (1,5)

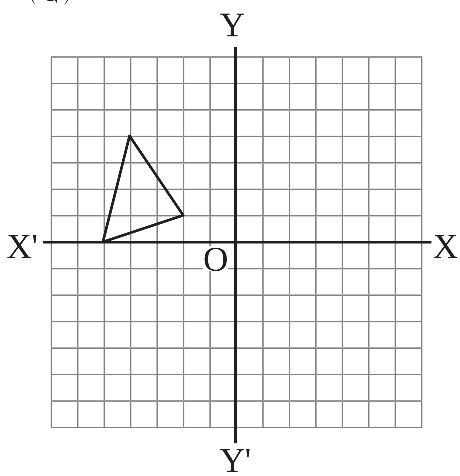
(iii) (10,6) र (12,6)

6. **तलका चित्रहरूलाई उद्गम बिन्दु केन्द्र हुने गरी 90° धनात्मक र 90° ऋणात्मक हुने गरी परिक्रमण गर्नुहोस् :**

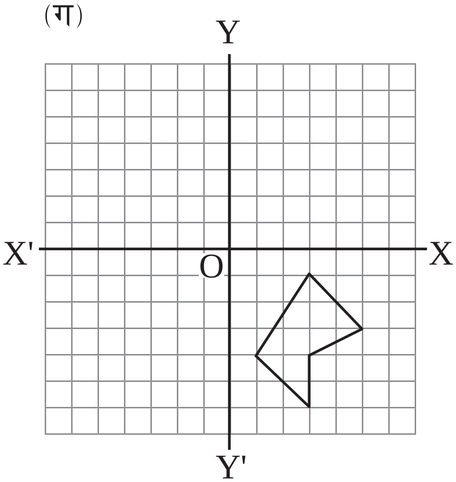
(क)



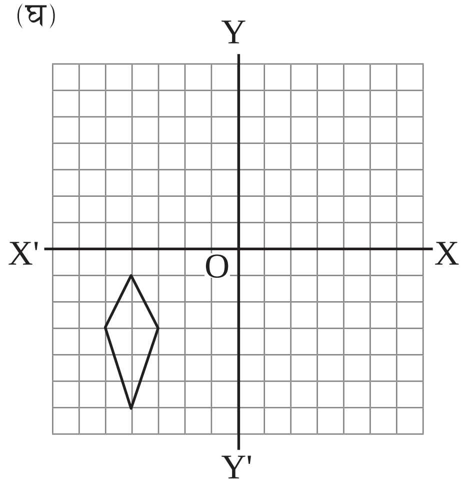
(ख)



(ग)



(घ)



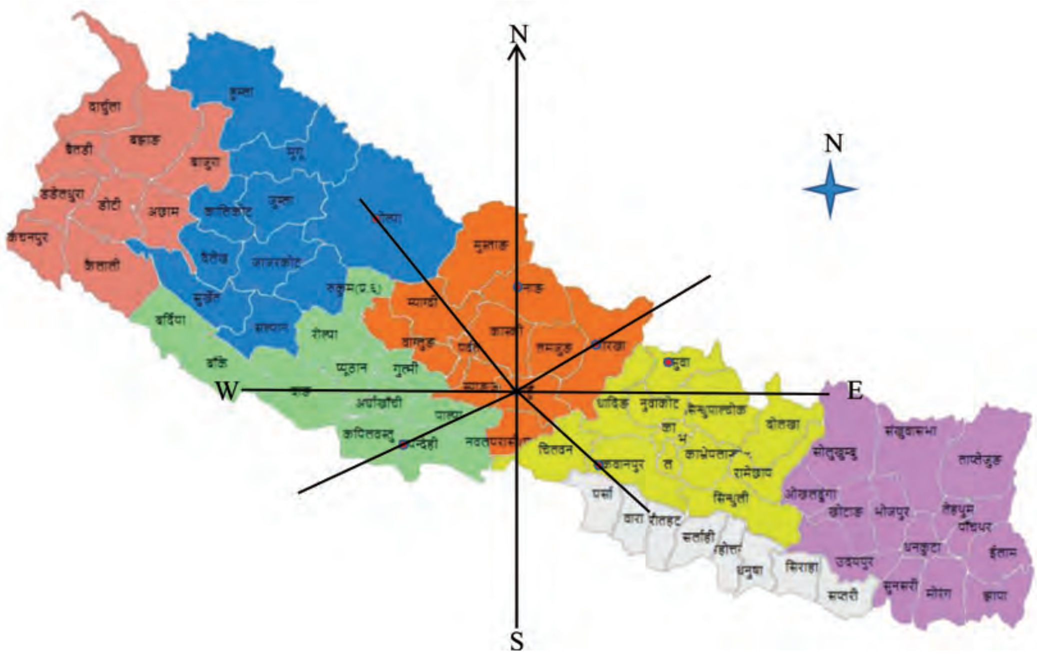
उत्तर : शिक्षकलाई देखाउनुहोस् ।

पाठ 20

दिशा स्थिति र स्केल ड्रइङ (Bearing and Scale Drawing)

20.0 पुनरवलोकन (Review)

(अ) तल नेपालको नक्सा दिइएको छ । तनहुँको 'त' अक्षरलाई केन्द्रबिन्दु मानी कुनै 6 जिल्लाका नामको पहिलो अक्षर भएको स्थान जोड्नुहोस् । तनहुँको 'त' अक्षर भएको स्थानबाट उक्त जिल्लाहरू कुन कुन दिशामा पर्दछन् पत्ता लगाई मिले नमिलेको साथीसँग छलफल गर्नुहोस् :



माथि नेपालको नक्सामा तनहुँको त लाई केन्द्रबिन्दु मान्दा,

(क) मनाङको म उत्तर दिशामा छ ।

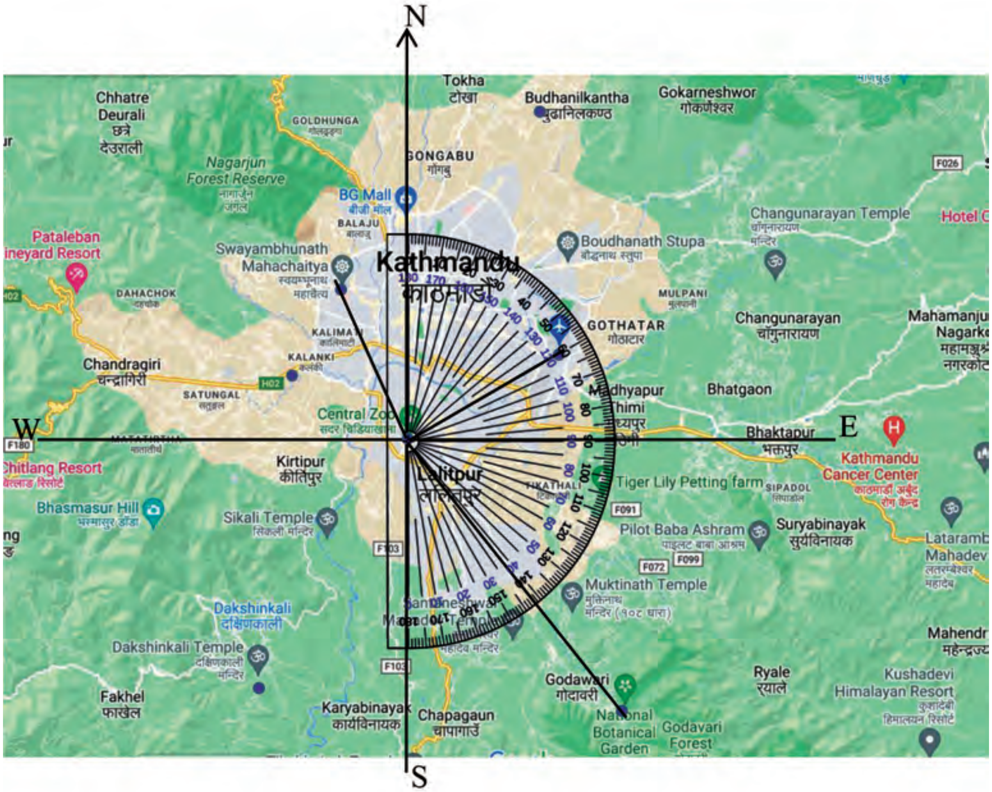
(ख) गोरखाको ग उत्तर पूर्व दिशामा छ ।

(ग) मकवानपुरको म दक्षिण पूर्व दिशामा छ । यसै गरी अरू जिल्ला तनहुँको त बाट कुन दिशामा पर्दछन् लेख्नुहोस् ।

(आ) प्रोट्याक्टरको प्रयोग गरेर तनहुँको त बाट गोरखाको ग को दिशा स्थिति कति कति डिग्री छ, नापेर पत्ता लगाउनुहोस् ।

20.1 दिशा स्थिति (Bearing)

क्रियाकलाप 1



माथि काठमाडौँ उपत्यकाको नक्सा दिइएको छ । सदर चिडियाखानाबाट अन्तर्राष्ट्रिय विमानस्थल, राष्ट्रिय वनस्पति उद्यान गोदावरी र स्वयम्भूनाथको दिशा स्थिति पत्ता लगाउनुहोस् ।

यहाँ सदर चिडियाखानाबाट अन्तर्राष्ट्रिय विमानस्थल 060^{o} को दिशा स्थितिमा छ । त्यस्तै राष्ट्रिय वनस्पति उद्यान गोदावरी 142^{o} को दिशा स्थितिमा छ । स्वयम्भूनाथको 335^{o} दिशा स्थिति छ । यसै गरी चिडियाखानाबाट कलङ्की, बुढानीलकण्ठ, दक्षिणकाली मन्दिरलगायतका ठाउँको दिशा पत्ता लगाउनुहोस् ।

उत्तर दिशा जनाउने रेखालाई आधार रेखा मानेर घडीको सुईको दिशामा कुनै स्थानबाट अर्को स्थानको अवस्थिति जनाउने तरिकालाई दिशा स्थिति भनिन्छ । यसलाई जनाउन तीनओटा अङ्कको प्रयोग गरिन्छ । यसको प्रयोग हवाई जहाज तथा पानी जहाजका चालकले प्रयोग गर्दछन् । माथि चिडियाखानाबाट अन्तर्राष्ट्रिय विमानस्थल दिशा स्थिति छ ।

उदाहरण 1

दायाँको चित्रमा उड्दै गरेको दुईओटा हवाई जहाजको स्क्रिनमा देखिएको कम्पास हो । यसका आधारमा जहाजहरू कतिको दिशा स्थितिमा उड्दै छन् ?

समाधान

यहाँ पहिलो हवाई जहाज 050° को दिशा स्थितिमा उड्दै छ भने दोस्रो जहाज 340° को दिशा स्थितिमा उड्दै छ ।

उदाहरण 2

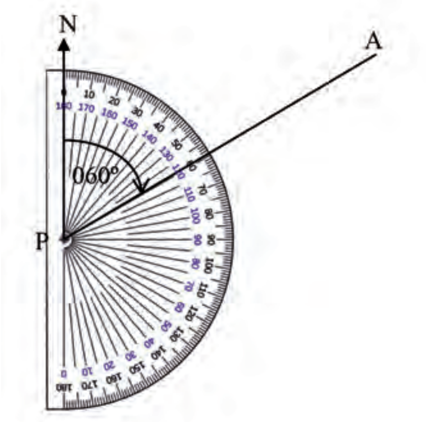
P स्थानबाट

(क) 060° को दिशा स्थिति पर्ने स्थान पत्ता लगाउनुहोस् ।

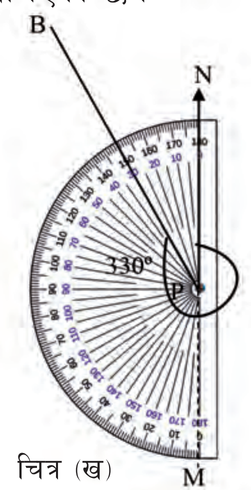
(ख) 330° को दिशा स्थिति पर्ने स्थान पत्ता लगाउनुहोस् ।

समाधान

यहाँ P बिन्दुमा उत्तर दिशा जनाउने रेखा PN खिचिएको छ ।



चित्र (क)



चित्र (ख)

(क) PN सँग 60° हुने गरी PA खिचिएको छ । अतः P बिन्दुबाट A को दिशा स्थिति $\angle NPA = 060°$ हुन्छ ।

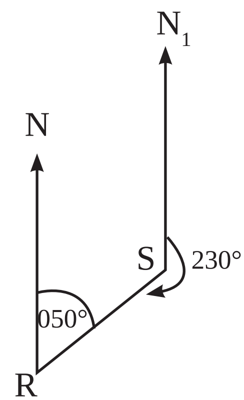
(ख) यसै गरी P बिन्दुबाट रेखा PN सँग 330° हुने गरी रेखा BP खिच्न न्युनकोण NPB $= 360° – 330° = 30°$ खिच्नुपर्छ । अतः P बिन्दुबाट B को दिशा स्थिति वृहतकोण $\angle NPB = 330°$ हुन्छ ।

अर्थात् NP लाई सिधा M सम्म लम्बाएर $\angle NPM + \angle MPB = 180° + 150° = 330°$

अतः P बिन्दुबाट B को दिशा स्थिति बृहत्कोण $\angle NPB = 330°$ हुन्छ ।

उदाहरण 3

R स्थानबाट स्थान S को दिशा स्थिति 050° छ भने स्थान S बाट R का दिशा स्थिति कति होला पत्ता लगाउनुहोस् ।



समाधान

यहाँ R बाट S को दिशा स्थिति $\angle NRS = 050°$

$\angle NRS + \angle N1SR = 180°$

or, $050° + \angle N1SR = 180°$

or, $\angle N1SR = 180° – 050° = 130°$

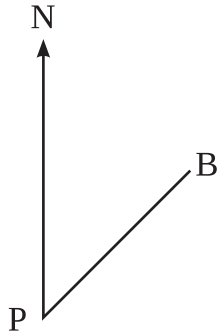
अब S बाट R को दिशा स्थिति $= 360° – 130°$

$= 230°$

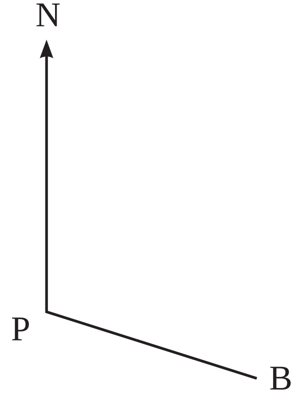
अभ्यास 20.1

1. दिइएका चित्रमा कोणहरू नापेर स्थान P बाट स्थान B को दिशा स्थिति लेख्नुहोस् :

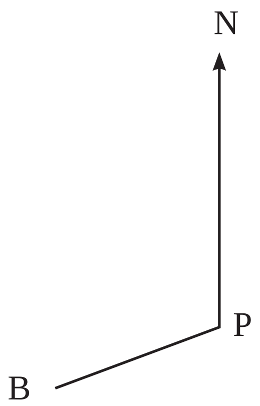
(क)



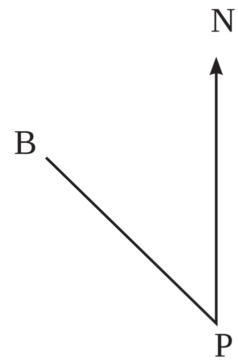
(ख)



(ग)



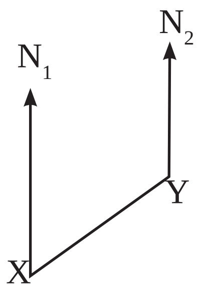
(घ)

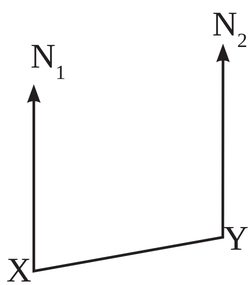


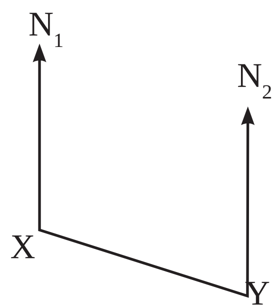
2. **कुनै बिन्दु A बाट तल दिइएको दिशा स्थितिमा पर्ने कुनै एक एक स्थान पत्ता लगाउनुहोस् :**

(क) 030° (ख) 090° (ग) 125° (घ) 260° (ङ) 285° (च) 340°

3. **दिइएका चित्रहरूमा स्थान X बाट Y को दिशा प्रोट्याक्टरको सहायताले पत्ता लगाई Y बाट X को दिशा स्थिति पत्ता लगाउनुहोस् :**







4. **दिइएको अवस्थामा दिशा स्थिति पत्ता लगाई चित्र निर्माण गर्नुहोस् :**

(क) तपाईंको घरबाट विद्यालयको दिशास्थिति 045° छ भने विद्यालयबाट तपाईंको घरको दिशा स्थिति

(ख) कक्षाकोठामा रीता बसेको स्थानबाट सङ्गीता बसेको स्थानको दिशा स्थिति 100° छ भने सङ्गीता बसेको स्थानबाट रीता बसेको स्थानको दिशा स्थिति

(ग) तपाईंको विद्यालयबाट गाउँको मन्दिरको दिशा स्थिति 190° छ भने मन्दिरबाट विद्यालयको दिशा स्थिति

(घ) तपाइँको जिल्ला सदरमुकामबाट काठमाडौँको दिशा स्थिति 265° छ भने काठमाडौँबाट तपाइँको जिल्ला सदरमुकामको दिशा स्थिति

(ङ) तपाइँको घरबाट स्वास्थ्य चौकीको दिशा स्थिति 065° छ भने स्वास्थ्य चौकीबाट तपाइँको घरको दिशा स्थिति

5. सँगैको चित्रका आधारमा सोधिएका प्रश्नको उत्तर दिनुहोस् :

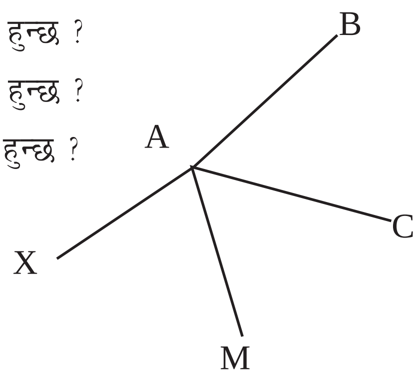
(क) बिन्दु A बाट B को दिशा स्थिति कति हुन्छ ?

(ख) बिन्दु B बाट c को दिशा स्थिति कति हुन्छ ?

(ग) बिन्दु A बाट M को दिशा स्थिति कति हुन्छ ?

(घ) बिन्दु A बाट X को दिशा स्थिति कति हुन्छ ?

(ङ) बिन्दु A बाट C को दिशा स्थिति कति हुन्छ ?



उत्तर

1 देखि 3 शिक्षकलाई देखाउनुहोस् ।

4. (क) 225° (ख) 280° (ग) 010° (घ) 085°

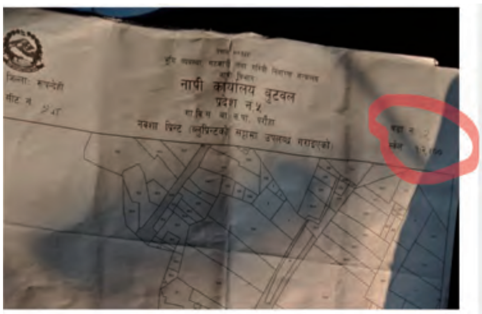
5. शिक्षकलाई देखाउनुहोस् ।

20.2 स्केल ड्रइङ (Scale Drawing)

क्रियाकलाप 1

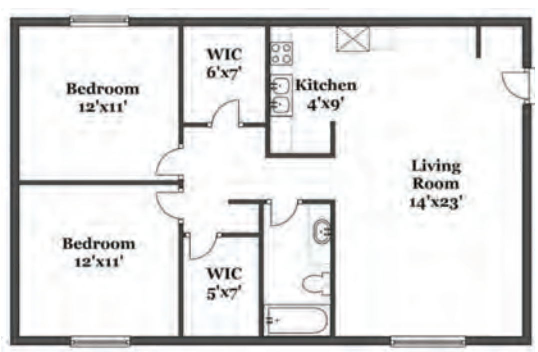
दिइएका नक्साको अवलोकन गर्नुहोस् र सोधिएका प्रश्नको उत्तर समूहमा छलफल गर्नुहोस् :

(क) जग्गाको नक्सा

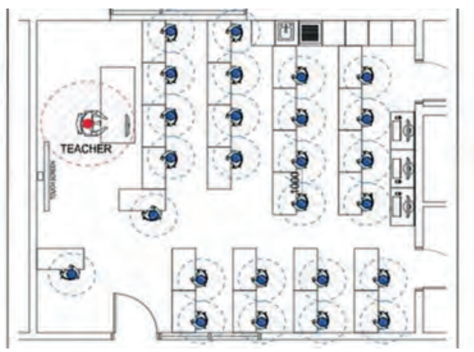


(ख) नेपालको नक्सा

(ग) घरको भुँइतलाको नक्सा



(घ) तपाईंको कक्षाकोठाको नक्सा



(अ) कुन कुन नक्सामा स्केल उल्लेख गरिएको छ ? छ भने कतिको स्केल दिइएको छ ?

(आ) नक्सामा स्केल दिँदा र नदिँदा के फरक हुन्छ होला ?

(इ) स्केलको प्रयोग गरी फुटबल कोर्टको नक्सा निर्माण गर्नुहोस् ।

कुनै वस्तु वा सहतलाई नक्सामा उतार गर्नका लागि स्केलको प्रयोग गरिन्छ ।

(क) स्केलको प्रयोग गरी ज्यादै ठुला र ज्यादै साना वस्तुलाई रेखाङ्कन गर्न सकिन्छ ।

(ख) नक्सा निर्माण गर्दा वास्तविक वस्तु र नक्सामा आवश्यकताअनुसार ठुलो वा सानो नाप लिएर निश्चित अनुपात बनाइन्छ ।

(ग) निश्चित स्केलको प्रयोग गरी नक्सा तयार गरेमा उक्त वस्तु वा सतहको वास्तविक नाप निकाल्न सकिन्छ ।

क्रियाकलाप 2

जहाज उडाउने क्रियाकलाप

आवश्यक सामग्री : धागो वा डोरी, किला, प्रोट्याक्टर वा दिशा देखाउने कम्पास, रुलर वा मिटर टेप, दिशा स्थिति र दुरी लेखेको चिटहरू, चित्रहरू राख्ने बट्टाहरू

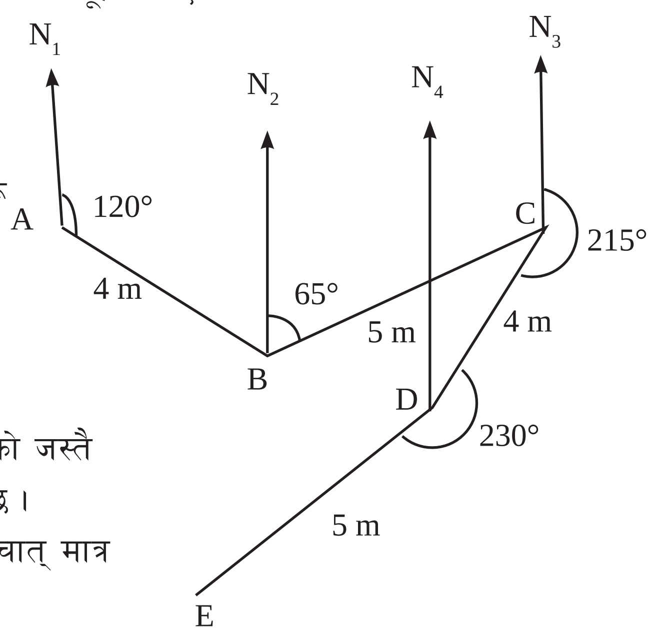
खेलाडी सङ्ख्या : आवश्यकताअनुसार समूह बनाएर

खेलका नियम तथा प्रक्रिया :

(क) चारओटा अलग अलग बट्टामा दिशा स्थितिको डिग्री र दुरी लेखेका चिटहरू राख्नु पर्दछ ।

(ख) सबै समूहलाई पालैपालो एक एकओटा चिट लिन लगाउने । चउरको फरक फरक स्थानमा चिटमा भएको जस्तै बिन्दुहरू पत्ता लगाउनु पर्दछ ।

(ग) एउटा चिटको काम सकेपश्चात् मात्र दोस्रो चिट दिनु पर्दछ ।



(घ) यस्तै प्रकारले सबैभन्दा पहिला दिशा स्थिति र स्केल मिलाएर जहाज उडाउने रुट जसले सही ढङ्गले पहिला तयार पार्छ उही समूह वा व्यक्ति विजयी हुन्छ, जस्तैः

(अ) बिन्दु A देखि B सम्मको दिशा स्थिति 125° र 4 मिटरको दुरीमा बिन्दु B

(आ) बिन्दु B देखि C सम्मको दिशा स्थिति 065° र 5 मिटरको दुरीमा बिन्दु C

(इ) बिन्दु C देखि D सम्मको दिशा स्थिति 215° र 4 मिटरको दुरीमा बिन्दु D

(ई) बिन्दु D देखि E सम्मको दिशा स्थिति 230° र 5 मिटरको दुरीमा बिन्दु E

उदाहरण 1

1 cm = 500 m को स्केल प्रयोग गरी तयार गरिएको नक्सामा दुई ठाउँबिचको दुरी 6 cm भए उक्त दुई ठाउँबिचको वास्तविक दुरी कति होला ?

समाधान

यहाँ नक्सामा राखिएको स्केल 1 cm = 500 m

नक्सामा दुई ठाउँबिचको दुरी = 6 cm

दुई ठाउँबिचको वास्तविक दुरी = 6×500 = 3000 m

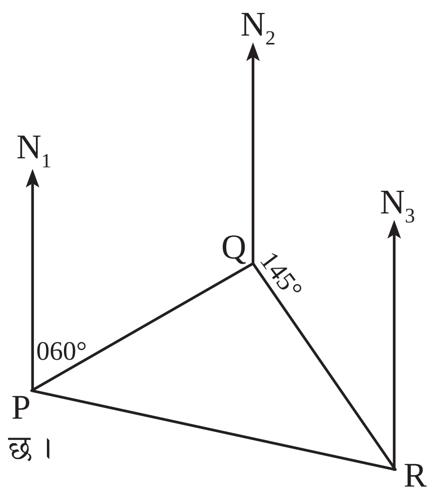
= 3 km

उदाहरण 2

1. एउटा जहाज सुरुको P स्थानबाट 060° दिशा स्थितिमा 600 माइल (miles) टाढा Q स्थानमा पुग्छ । फेरि उक्त Q स्थानबाट 145° दिशा स्थितिमा 800 माइल टाढा R स्थानसम्म उडान गर्दछ भने,

(क) उक्त जहाजको सुरुको स्थान र अन्तिम स्थानबिचको वास्तविक दुरी कति होला ? (स्केल 1 cm = 200 miles)

(ख) अन्तिम स्थानबाट सुरुको स्थानको दिशास्थिति पत्ता लगाउनुहोस् ।



समाधान

यहाँ जहाजको सुरु स्थान = P र अन्तिम स्थान = R छ ।

नक्सामा राखिएको स्केल 1 cm = 200 miles

नक्सामा P र R बिचको दुरी = 4.5 cm

P र R बिचको वास्तविक दुरी = 4.5×200 = 900 miles

(ख) फेरि प्रोट्याक्टरले चित्रमा $\angle N_3RP$ को नाप लिँदा $\angle N_3RP = 078°$

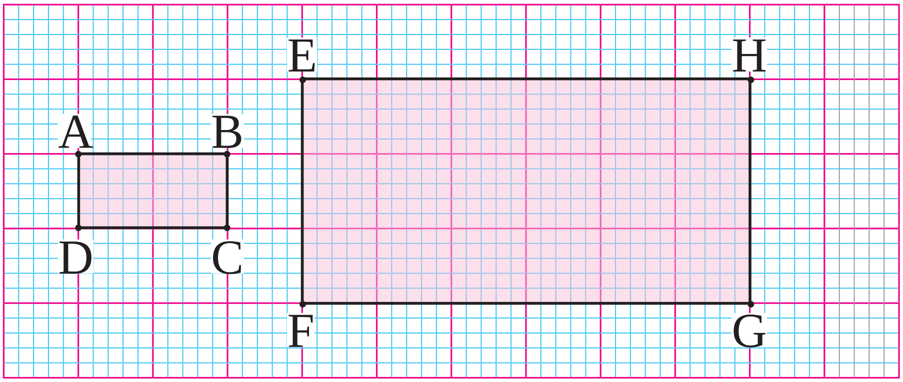
अन्तिमको स्थानबाट सुरुको स्थानको दिशा स्थिति = 360° – 078°

= 282°

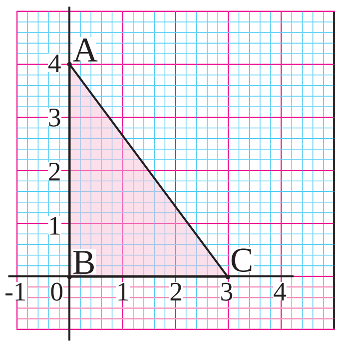
अतः R स्थानबाट P स्थानको दिशा स्थिति 282° भयो ।

अभ्यास 20.2

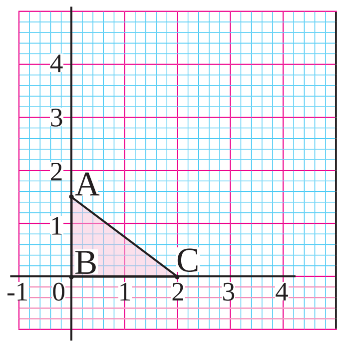
1. **सँगैको चित्रमा आयत** ABCD **आयत** EFGH **को स्केल ड्इङ हो । यहाँ प्रयोग गरिएको स्केल कति हो ?**



2. **ग्राफको प्रयोग गरी दिइएका त्रिभुजको निम्नलिखित हुने गरी त्रिभुज बनाउनुहोस् :**



चित्र (क)



चित्र (ख)

(क) दिइएका त्रिभुजको आधा सानो हुने गरी

(ख) दिइएका त्रिभुजको दोब्बर ठुलो हुने गरी

(ग) प्रत्येक अवस्थामा दिइएको त्रिभुज र स्केलपछि निकालेको त्रिभुजको सङ्गति भुजाहरू र सङ्गति कोणको सम्बन्ध के भयो ?

(घ) आधा सानो बनाउँदाको स्केल र दोब्बर ठुलो बनाउँदाको स्केल के के भयो ?

(ङ) दश गुणा सानो बनाउन कति स्केल लिनु पर्दछ ? दश गुणा ठुलो बनाउन कति स्केल लिनु पर्दछ ?

3. तलका प्रश्नका आधारमा दुई स्थानबिचको वास्तविक दुरी पत्ता लगाउनुहोस् :

(क) दुई स्थानबिचको दुरी नक्सामा 7 cm (स्केल 1 cm = 750 m)

(ख) दुई स्थानबिचको दुरी नक्सामा 6.5 cm (स्केल 1 cm = 1000 mile)

(ग) दुई स्थानबिचको दुरी नक्सामा 3 cm (स्केल 1 cm = 350 m)

(ङ) दश गुणा सानो बनाउन कति स्केल लिनुपर्दछ ? दश गुणा ठुलो बनाउन कति स्केल लिनु पर्दछ ?

4. दिइएको नियमित षट्भुजको भुजा नाप्नुहोस् । यो 1: 200 को स्केलमा बनाइएको छ भने उक्त षट्भुजको भुजाको नाप निकाल्नुहोस् ।

5. 15 कि.मि., 20 कि.मि. र 25 कि. मि. नाप भएको एउटा त्रिभुजाकार गाउँपालिकाको उपयुक्त स्केल लिएर नक्सा बनाउनुहोस् ।

6. माधव स्थान A बाट 030° दिशास्थितिमा 5km हिँडेपछि स्थान B मा पुग्छ । त्यसपछि B बाट 140° को दिशा स्थितिमा 3km हिँडेपछि स्थान C मा पुग्छ र अन्त्यमा सिधा C बाट A मा फर्कन्छ भने,

(क) उपयुक्त स्केल छानी स्केल डइङ गर्नुहोस् ।

(ख) स्थान C बाट स्थान A सम्मको स्केल दुरी कति होला ?

(ग) स्थान C बाट स्थान A सम्म सिधा फर्किँदा उसले वास्तविक दरी कति पार गर्छ ?

(घ) स्थान C बाट A स्थानको दिशास्थिति पत्ता लगाउनुहोस् ।

7. एउटा सहरको बसपार्कबाट 500 मिटर दक्षिणमा एउटा मन्दिर पर्दछ र पौडीपाखेरी मन्दिरबाट 065° दिशास्थितिमा पर्छ । बसपार्कबाट पौडीपोखरी 145° दिशास्थितिमा पर्छ भने पौडीपोखरी र मन्दिरबिचको वास्तविक दुरी कति होला ? 1cm = 100m को स्केल प्रयोग गरी देखाउनुहोस् ।

8. स्थान A स्थान B बाट 400 मिटर पश्चिममा पर्छ । स्थान A बाट स्थान C को दिशास्थिति 050° छ र स्थान B बाट C को दिशास्थिति 290° छ भने,

(क) 1cm = 40m स्केल लिई स्केल ड्रइङ गर्नुहोस् ।

(ख) स्थान B र स्थान C बिचको वास्तविक दुरी कति होला ?

(ग) स्थान C का आधारमा स्थान B को दिशास्थिति पत्ता लगाउनुहोस् ।

9. चित्रमा एउटा गाउँका मुख्य ठाउँहरू देखाइएको छ । यदि स्केल 1cm = 150 m भए रुलर प्रयोग गरी हुलाक कार्यालयबाट निम्नलिखित ठाउँको वास्तविक दुरी पत्ता लगाउनुहोस् :

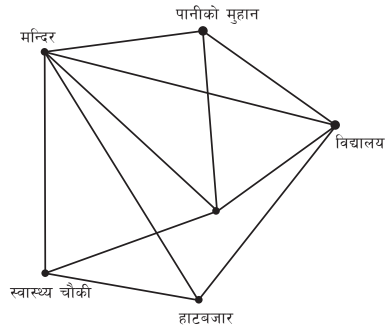
(क) मन्दिर

(ख) पानीको मुहान

(ग) स्वास्थ्य चौकी

(घ) हाटबजार

(ङ) विद्यालय



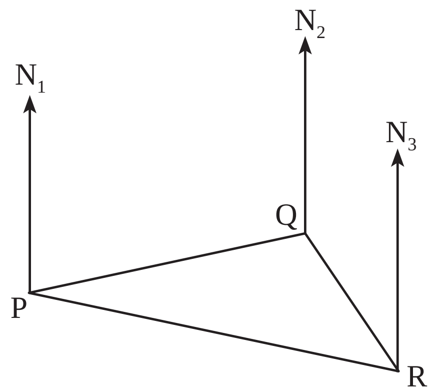
10. **रेणुकाले सधैं बिहान आँफू हिड्ने त्रिभुजाकार बाटाको नक्सा स्केल** 1 cm = 500 m **मा तयार गरेकी छिन्। उक्त नक्साका आधारमा तल सोधिएका प्रश्नको उत्तर लेख्नुहोस् :**

(क) रेणुका दैनिक कति दुरी पार गर्ने रहिछन्।

(ख) सुरुको स्थान र अन्तिम स्थानबिचको वास्तविक दुरी कति होला ?

(ग) P स्थानबाट Q स्थानको दिशा स्थिति पत्ता लगाउनुहोस्।

(घ) Q स्थानबाट R स्थानको दिशा स्थिति पत्ता लगाउनुहोस्।



(ङ) अन्तिम स्थान R बाट सुरुको P स्थानको दिशास्थिति पत्ता लगाउनुहोस्।

परियोजना कार्य (Project Work)

(क) तपाईंको घर भएको जग्गाको नाप लिनुहोस्। जग्गाको नक्सा बनाउनुहोस्। स्केल आफ्नो पेपरको साइज र जग्गाको साइजसँग मिल्ने गरी लिनुहोस्। तपाईंले प्रयोग गरको स्केलका आधारमा जग्गाको क्षेत्रफल निकाल्नुहोस्।

(ख) तपाईंको घरको पहिलो तल्लाको सबै कोठाको नाप र डिजाइन उचित स्केल लिएर बनाउनुहोस्।

(ग) जग्गाको नाप र घरको डिजाइन परिवारका सदस्यलाई प्रस्तुत गर्नुहोस्। उहाँहरूको सुझावलाई नोट गरेर आवश्यक भए त्योअनुसार नक्सा वा डिजाइनमा सुधार गर्नुहोस्।

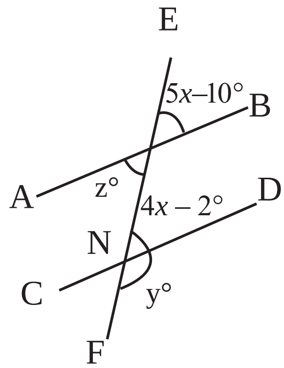
उत्तर

1. 1:3   2. शिक्षकलाई देखाउनुहोस्।   3. (क) 5.25 km

(ख) 6500 mile (ग) 1.05 km   4 देखि 10 शिक्षकलाई देखाउनुहोस्।

मिश्रित अभ्यास

1. **चित्रमा** AB **र** CD **लाई छेदक** EF **ले बिन्दु** M **र** N **मा काटेको छ। जहाँ** $\angle EMB = 5x - 10^\circ$, $\angle END = 4x - 2^\circ$, $\angle FND = y^\circ$ **र** $\angle AMN = z^\circ$ **छ। चित्रको अवलोकन गरी तलका प्रश्नको उत्तर दिनुहोस्।**

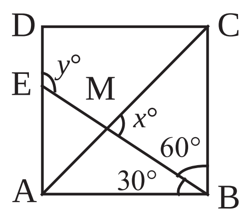


(क) दुई जोडी एकान्तर कोण र सङ्गत कोणको नाम लेख्नुहोस्।

(ख) के $\angle BMN$ र $\angle MND$ को नाप बराबर हुन्छ ? कारणसहित लेख्नुहोस्।

(ग) x, y र z को मान पत्ता लगाउनुहोस्।

2. **चित्रमा** 4 cm **लम्बाइ भएको** ABCD **वर्ग देखाइएको छ। जहाँ,** $\angle ABE = 30^\circ$, $\angle BMC = x^\circ$ **र** $\angle DEM = y^\circ$ **छ। चित्रको अवलोकन गरी तलका प्रश्नको उत्तर दिनुहोस्।**

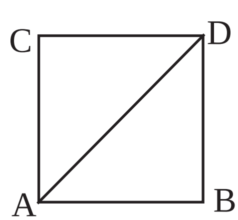


(क) वर्गको बाहिरी कोण पत्ता लगाउने सूत्र लेख्नुहोस्।

(ख) x र y को मान पत्ता लगाउनुहोस्।

(ग) कम्पासको प्रयोग वर्ग ABCD रचना गर्नुहोस्।

3. **चित्रमा** 8 cm **लम्बाइ भएको वर्ग** ABCD **देखाइएको छ। जसको विकर्ण** AC **छ।**

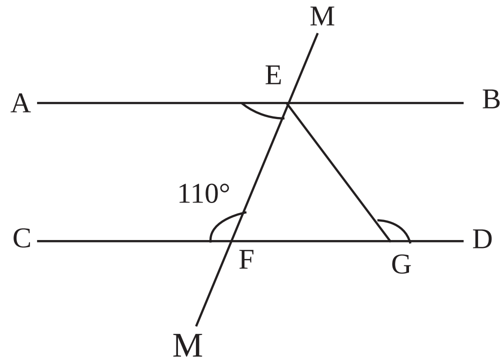


(क) वर्गको भित्री कोण पत्ता लगाउने सूत्र लेख्नुहोस्।

(ख) प्रमाणित गर्नुहोस् : $\Delta ABC \cong \Delta CDA$

(ग) ΔABC को क्षेत्रफल कति हुन्छ ? गणना गर्नुहोस्।

5. **दिइएको चित्रमा समानान्तर रेखाखण्डहरू AB र CD लाई MN ले क्रमशः E र F मा प्रतिच्छेदन गरेको छ । चित्रको अवलोकन गरी तलका प्रश्नको उत्तर दिनुहोस् :**



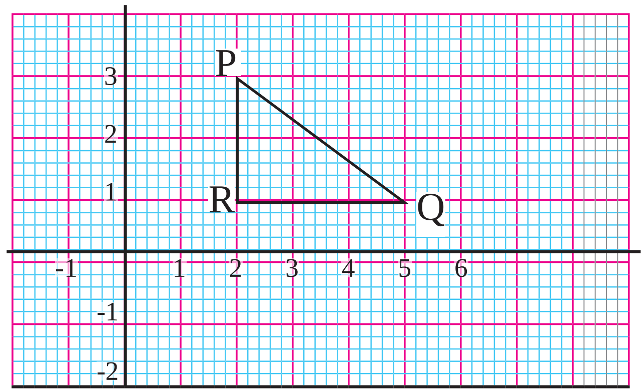
(क) चित्रबाट, ∠MEA सँग बराबर हुने सङ्गति कोण लेख्नुहोस् ।

(ख) यदि ∠CFE = 110° भए x को मान कति हुन्छ, पत्ता लगाउनुहोस् ।

(ग) यदि EF = FG भए y को मान कति हुन्छ, पत्ता लगाउनुहोस् ।

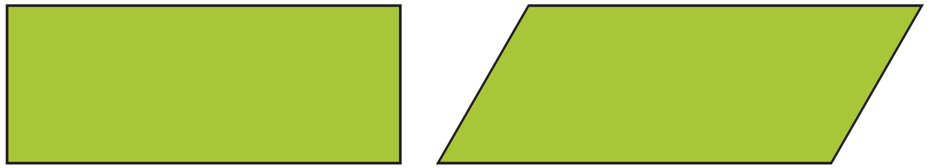
6. **दिइएको चित्रका आधारमा तलका प्रश्नको उत्तर लेख्नुहोस् :**

(क) चित्रमा दिइएअनुसार ग्राफमा ∠PQR को चित्र बनाउनुहोस् र ∠PQ लाई Y– अक्षमा परावर्तन गरी बिन्दुहरू P, Q र R को परावर्तन पछिको निर्देशाङ्क लेख्नुहोस् ।



(ख) दिइएको त्रिभुजमा P, Q र R को निर्देशाङहरू दोब्बर गऱ्यो भने बन्ने त्रिभुज ∠P'Q'R' मा के P'Q' को लम्बाइ PQ को लम्बाइभन्दा दुई गुणा हुन्छ त ? गणना गरी कारणसहित लेख्नुहोस् ।

7. **चित्रमा देखाइएको आयत र समानान्तर चतुर्भुजको क्षेत्रफल बराबर छ । जहाँ आयतको लम्बाइ** 8 cm **र चौडाइ** 5 cm **छ भने समानान्तर चतुर्भुजको आधारको लम्बाइ** 10 cm **छ ।**



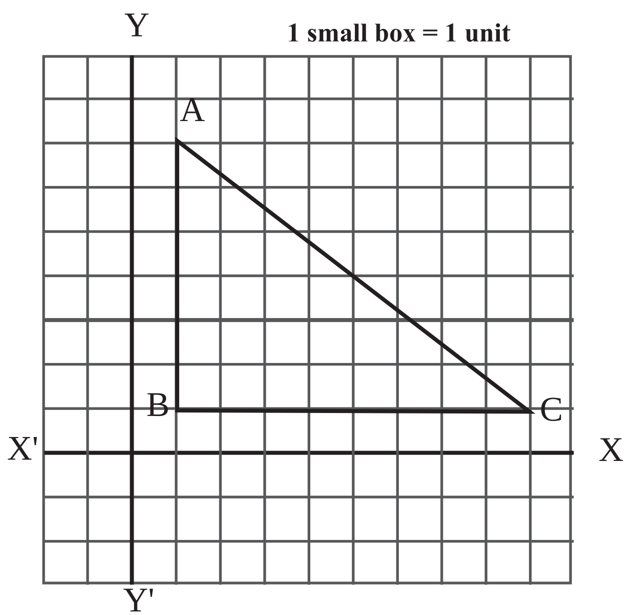
(क) कम्पासको सहायताले आयत ABCD को रचना गर्नुहोस् ।

(ख) समानान्तर चतुर्भुजको उचाइ कति हुन्छ ? पत्ता लगाउनुहोस् ।

(ग) के समानान्तर चतुर्भुजको उचाई र आधारको लम्बाई दुवैलाई दोब्बर गर्दा क्षेत्रफल पनि दोब्बर हुन्छ? कारणसहित लेख्नुहोस् ।

8. **दिइएको लेखाचित्रमा** $\angle ABC$ **का शीर्षबिन्दुहरू** A(1, 7), B(1, 1) **र** C(9, 1) **छन् ।**

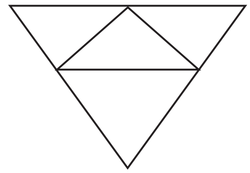
(क) $\angle ABC$ लाई उद्गम बिन्दुबाट धनात्मक 90° दिशामा परिक्रमण गर्दा बन्ने प्रतिबिम्बको निर्देशाङ्क पत्ता लगाई दुवै त्रिभुजलाई एउटै लेखाचित्रमा प्रस्तुत गर्नुहोस् ।



(ख) रेखा AC को लम्बाइ कति हुन्छ ? पाइथागोरस साध्य प्रयोग गरी पत्ता लगाउनुहोस् ।

(ग) सबै अनुरूप त्रिभुज समरूप त्रिभुज हुन् तर सबै समरूप त्रिभुज अनुरूप त्रिभुज होइनन् । यस भनाइलाई उदाहरणसहित पुष्टि गर्नुहोस् ।

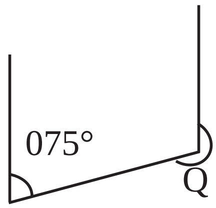
9. देखाइएको चित्रमा चारओटा समबाहु त्रिभुजहरू मिलाएर बनाइएको ठोस वस्तुको नेट देखाइएको छ ।



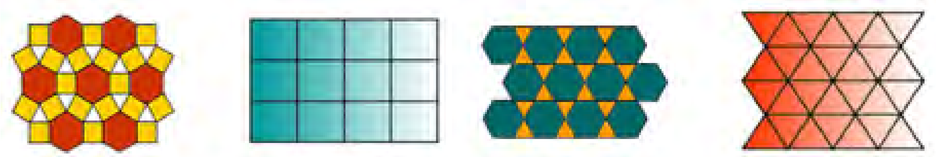
(क) दिइएको नेटबाट बन्ने ठोसवस्तुको नाम लेख्नुहोस् ।

(ख) एउटा समबाहु त्रिभुजका बढीमा कतिओटा रेखीय सममिति अक्ष खिच्न सकिन्छ ? कारणसहित उदाहरण दिनुहोस् ।

(ग) दिइएको चित्रमा बिन्दु P बाट Q को दिशास्थिति 075° छ । बिन्दु Q बाट P को दिशास्थिति कति हुन्छ, पत्ता लगाउनुहोस् ।



10. देखाइएको चित्रमा चारओटा टेसिलेसनको नमुना देखाइएको छ :

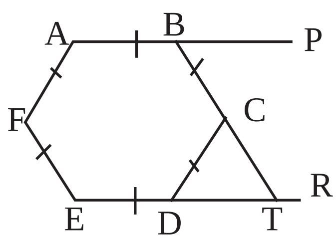


(क) नियमित र अर्धनियमित टेसिलेसनलाई परिभाषित गर्नुहोस् ।

(ख) माथिका चारओटा टेसिलेसनमध्ये नियमित र अर्धनियमित टेसिलेसन छुट्याउनुहोस् ।

(ग) नियमित बहुभुज र नियमित टेसिलेसनको सम्बन्ध उल्लेख गर्नुहोस् ।

11. सँगैको चित्रमा AP//ER र AB = BC = CD = DE = EF = FA छन् ।



(क) चित्रमा बनेको ABCDEF को ज्यामितीय नाम के हो, लेख्नुहोस् ।

(ख) ∠CDT को नाप पत्ता लगाउनुहोस् ।

(ग) ΔCDT समबाहु त्रिभुज हो भनी प्रमाणित गर्नुहोस् ।

उत्तर

1. क र ख शिक्षकलाई देखाउनुहोस् । (ग) $x = 8°$, $y = 150°$, $z = 30°$

2. (ख) $x = 75°$, $y = 120°$ 3. (क) र (ख) दिशक्षकलाई देखाउनुहोस् । (ग) $32cm^2$

4. शिक्षकलाई देखाउनुहोस् । 5. (ख) $x = 70°$ (ग) $y = 125°$

6 - 8 को शिक्षकलाई देखाउनुहोस् । 9. (क) टेड्राहेड्रन (ख) 3 (ग) 255°

10. शिक्षकलाई देखाउनुहोस् । 11. (क) नियमित पाड्भूज (ख) 60° (ग) शिक्षकलाई देखाउनुहोस् ।

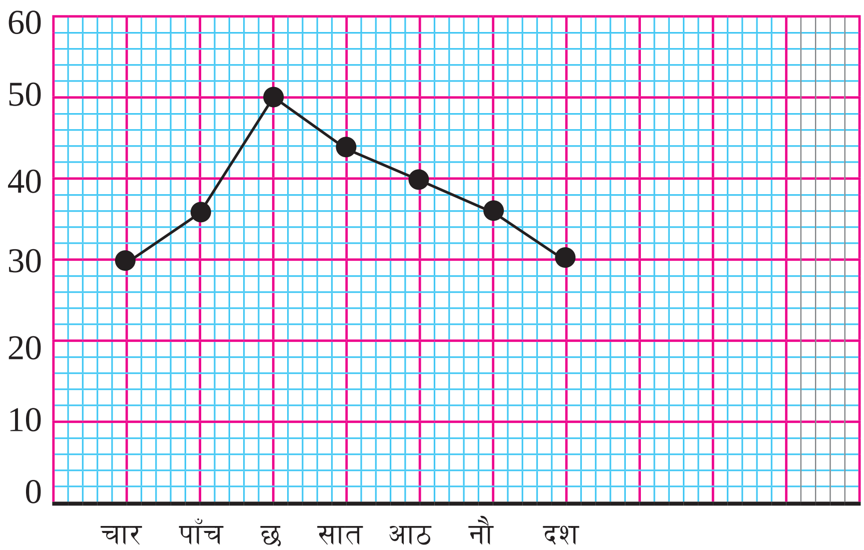
पाठ 21

तथ्याङ्कशास्त्र (Statistics)

21.0 पुनरवलोकन (Review)

दिइएको रेखाचित्र महेन्द्रग्राम माध्यमिक विद्यालयलाई 2079 सालमा प्राप्त पुस्तक थानका आधारमा तयार गरिएको हो । उक्त रेखाचित्र अध्ययन गरी सोधिएका प्रश्नमा छलफल गर्नुहोस् :

महेन्द्रग्राम माध्यमिक विद्यालयलाई प्राप्त पुस्तक विवरण (2079)



(क) प्रत्येक कक्षामा कति कति थान पुस्तक प्राप्त भएको रहेछ ?

(ख) सबैभन्दा बढी थान पुस्तक कुन कक्षाको प्राप्त भएको रहेछ ?

(ग) सबैभन्दा कम थान पुस्तक कुन कक्षाका लागि प्राप्त भएको रहेछ ?

(घ) कुन कुन कक्षामा बराबर पुस्तक थान प्राप्त भएको रहेछन् ?

(ङ) जम्मा कति थान पुस्तक प्राप्त भएका रहेछन् ?

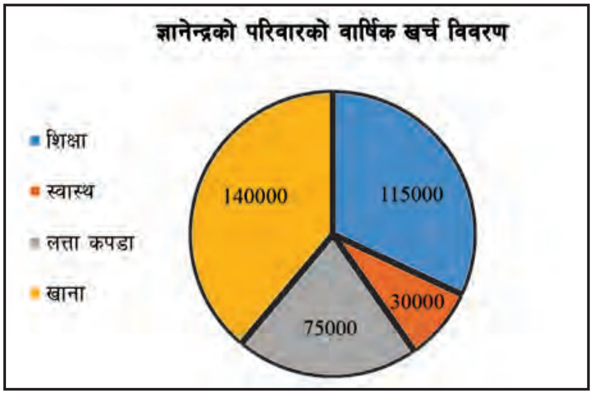
(च) रेखाचित्रका आधारमा बारम्बारता तालिका निर्माण गर्नुहोस् ।

(छ) माथि (च) मा बनाइएको तालिकाका आधारमा स्तम्भ चित्र बनाउनुहोस् ।

21.1 वृत्तचित्र (Pie Chart)

क्रियाकलाप 1

दिइएको वृत्तचित्रमा ज्ञानेन्द्रको परिवारको वार्षिक खर्चको विवरण प्रस्तुत गरिएको छ । उक्त वृत्तचित्रका आधारमा सोधिएका प्रश्नमा छलफल गर्नुहोस् :



(क) ज्ञानेन्द्रको परिवारका वार्षिक रूपमा शिक्षामा कति रुपियाँ खर्च हुने रहेछ ?

(ख) उक्त परिवारको स्वास्थ, लत्ताकपडा र खानामा कति कति रुपियाँ खर्च हुने रहेछ ?

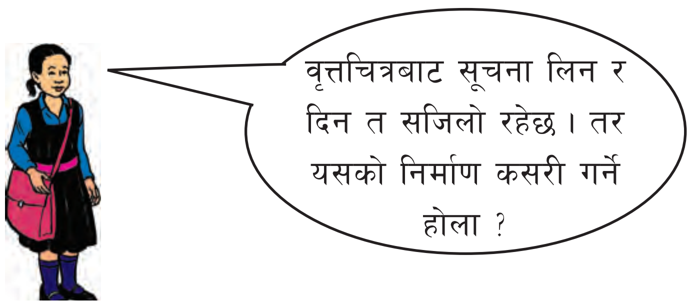
(ग) सबैभन्दा बढी र सबैभन्दा कम खर्च कुन कुन शीर्षकमा भएको रहेछ ?

(घ) शीर्षकगत कति कति प्रतिशत खर्च भएको रहेछ ?

(ङ) वर्षभरि सबै महिनामा खानाका लागि बराबर खर्च हुने रहेछ भने एक महिनामा खानाबापत कति रुपियाँ खर्च हुने रहेछ ?

(च) ज्ञानेन्द्रको परिवारले माथि उल्लेख गरिएको खर्च कटाएर वार्षिक बैङ्कमा रु. 2,35,000 बचत गर्दा रहेछन् भने उनको परिवारको वार्षिक आम्दानी कति रहेछ ?

विचारणीय प्रश्न : माथि क्रियाकलाप 1 को छलफलमा वृत्तचित्रको नै प्रयोग किन गरिएको होला ?



क्रियाकलाप 2

ज्ञानेन्द्रको परिवारको वार्षिक खर्च विवरणका आधारमा तयार गरिएको वृत्तचित्र क्रियाकलाप 1 मा दिइएको छ । उक्त वृत्तचित्रको अवलोकन गर्नुहोस् । त्यो वृत्तचित्र कसरी बनाएको छ ? समूहमा छलफल गरी त्यसैका आधारमा दिइएको तथ्याङ्कको प्रयोग गरी वृत्तचित्र निर्माण गर्नुहोस् ।

आप्पाको परिवारको वार्षिक खर्च विवरण

शिक्षा	स्वास्थ्य	लत्ताकपडा	खाना
रु. 96,000	रु. 40,000	रु. 64,000	रु. 1,20,000

क्रियाकलाप 1 को वृत्तचित्र ज्ञानेन्द्रको परिवारको वार्षिक खर्च विवरणका आधारमा तयार गरिएको हो । उसको परिवारमा शिक्षा, स्वास्थ्य, लत्ताकपडा र खानामा खर्च हुने रहेछ । वृत्तको केन्द्रमा पूरा कोण 360° हुन्छ । त्यसैले जम्मा खर्चलाई शीर्षकगत रूपमा 360° मा बाँडफाँड गर्नुपर्ने रहेछ, तर कसरी ?

ज्ञानेन्द्रको परिवारको जम्मा खर्च = रु 3,60,000 छ । यसलाई 360° मा बराबर बाँड्नु पर्छ ।

रु. 3,60,000 $= 360°$

रु. 1 $= \dfrac{360°}{3,60,000}$

शिक्षामा खर्च = रु. 115000 $= \dfrac{360°}{3,60,000} \times 115000 = 115°$

माथिको वृत्तचित्रमा शिक्षामा 115° को कोण बनाएको छ वा छैन परीक्षण गर्नुहोस् ।

त्यस्तै स्वास्थ्यमा खर्च = रु. 30,000 $= \dfrac{360°}{360000} \times 30000 = 30°$

लत्ता कपडामा खर्च = रु. 75,000 $= \dfrac{360°}{360000} \times 75000 = 75°$

खानामा खर्च = रु. 1,40,000 $= \dfrac{360°}{360000} \times 140000 = 140°$

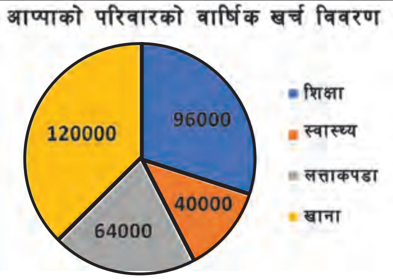
माथिको जस्तो प्रक्रिया अपनाएर आप्पाको परिवारको वार्षिक खर्चको वृत्तचित्र बनाउनुहोस् ।

आप्पाको परिवारको जम्मा खर्च = रु 3,20,000 छ ।

रु. 3,20,000 $= 360°$

रु. 1 $= \dfrac{360°}{3,20,000}$

शीर्षक	खर्च	गणना
शिक्षा	रु. 96000	$= \frac{360°}{320000} \times 96000 = 108°$
स्वास्थ्य	रु. 40,000	$= \frac{360°}{320000} \times 40000 = 45°$
लत्ताकपडा	रु. 64,000	$= \frac{360°}{320000} \times 64000 = 72°$
खाना	रु. 1,20,000	$= \frac{360°}{320000} \times 120000 = 135°$
जम्मा	रु. 3,20,000	



कुनै पनि तथ्याङ्कलाई एउटा वृत्तको क्षेत्रफलसँग बराबर हुने गरी विभिन्न शीर्षकलाई क्षेत्रक (sector) मा प्रस्तुत गरिन्छ भने उक्त चित्रलाई वृत्तचित्र (Pie Chart) भनिन्छ ।

दिइएको तथ्याङ्कलाई वृत्तचित्रमा प्रस्तुत गर्दा निम्नलिखित चरणहरू अप्नाउनुपर्छ :

चरण 1. दिइएको तथ्याङ्कको जम्मा मान निकाल्ने

चरण 2. तथ्याङ्कको जम्मा मानलाई 360° सँग बराबर गरी प्रत्येक शीर्षकगत कोण निकाल्ने ।

$$\frac{360^{o}}{\text{तथ्याङ्कको जम्मा मान}} \times \text{शीर्षकगत मान}$$

चरण 3 : आफ्नो अनुकूल अर्धव्यास लिई वृत्तको रचना गरी एउटा अर्धव्यास खिच्ने ।

चरण 4 : उक्त अर्धव्यासलाई आधार रेखा मानी प्रोट्याक्टरले शीर्षकगत कोणहरू क्रमशः खिच्दै जाने

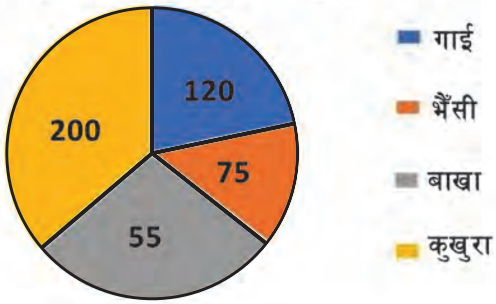
चरण 5 : फरक फरक क्षेत्रकलाई फरक फरक रङ लगाउने । रङअनुसारको खर्चलाई सङ्केतमा देखाउने

चरण 6 वृत्तचित्रको शीर्षक राख्ने, अब वृत्तचित्र तयार भयो

उदाहरण 1

1. सत्यनारायणको पशुपालन फार्ममा भएका पशुहरूको विवरणका आधारमा तयार गरिएको वृत्तचित्र अध्ययन गरी सोधिएका प्रश्नको उत्तर दिनुहोस् :

सत्यनारायणको पशुपालन फार्ममा भएको पशुहरूको विवरण



(क) सत्यनारायणको पशुपालन फार्ममा कुन कुन जनावरहरू कति कतिको सङ्ख्यामा रहेछन् ?

(ख) सबैभन्दा बढी र कम सङ्ख्यामा कुन कुन जनावर रहेछन् ?

(ग) सबै जनावरको जम्मा सङ्ख्या कति रहेछ ?

(घ) गाई, भैँसी, बाखा र कुखरा कति कति प्रतिशतमा रहेछन् ?

समाधान

(क) सत्यनारायणको परिवारमा गाई 120, भैँसी 75, बाखा 155 र कुखुरा 200 ओटा छन् ।

(ख) सबैभन्दा बढी कुखुरा र सबैभन्दा कम भैँसी छन् ।

(ग) सबै जनावरहरूको जम्मा सङ्ख्या = 120 + 75 + 155 + 200 = 550

गाई = $\frac{120}{550} \times 100\% = 21.8\%$

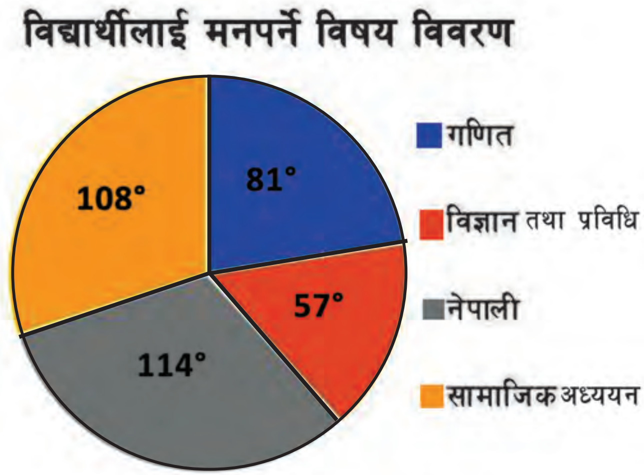
भैँसी = $\frac{75}{550} \times 100\% = 13.6\%$

बाखा = $\frac{155}{550} \times 100\% = 28.2\%$

कुखुरा = $\frac{200}{550} \times 100\% = 36.4\%$

उदाहरण 2

जनता माध्यमिक विद्यालयमा अध्ययनरत 480 जना विद्यार्थीलाई 'कुन विषय मन पर्छ ?' भनी सोधिएको प्रश्नमा प्राप्त उत्तरका आधारमा तयार गरिएको वृत्तचित्र तल दिइएको छ । सो वृत्त चित्रको अध्ययन गरी सोधिएका प्रश्नको उत्तर दिनुहोस् ।



(क) प्रत्येक विषय मन पराउने विद्यार्थी सङ्ख्या निकाल्नुहोस् ।

(ख) सबैभन्दा धेरै र सबैभन्दा कम मन पराउने विषयको विद्यार्थी सङ्ख्याबिचको फरक कति छ, पत्ता लगाउनुहोस् ।

(ग) गणित र विज्ञान तथा प्रविधि विषय मन पराउने कति कति प्रतिशत विद्यार्थी रहेछन् ?

समाधान

यहाँ जम्मा विद्यार्थी सङ्ख्या = 480 जना

अब $360^o = 480$ जना

$\therefore 1^o = \frac{480}{360} = \frac{4}{3}$ जना

(क) नेपाली विषय मन पराउने विद्यार्थी सङ्ख्या $= 114° = 114 \times \frac{4}{3} = 152$ जना

गणित विषय मन पराउने विद्यार्थी सङ्ख्या $= 81° = 81 \times \frac{4}{3} = 108$ जना

विज्ञान तथा प्रविधि विषय मन पराउने विद्यार्थी सङ्ख्या $= 57° = 57 \times \frac{4}{3} = 76$ जना

सामाजिक अध्ययन विषय मन पराउने विद्यार्थी सङ्ख्या $= 108° = 108 \times \frac{4}{3} = 144$ जना

(ख) सबैभन्दा बढी मन पराउने नेपाली विषयको विद्यार्थी सङ्ख्या = 152 जना

सबैभन्दा कम मन पराउने विज्ञान तथा प्रविधि विषयको विद्यार्थी सङ्ख्या = 76 जना

फरक = 152 – 76 = 76 जना

(ग) गणित मन पराउनेको प्रतिशत = $\frac{108}{480} \times 100\% = 22.5\%$

विज्ञान मन पराउनेको प्रतिशत = $\frac{76}{480} \times 100\% = 15.8\%$

उदाहरण 3

ज्ञानज्योति माध्यमिक विद्यालयको कक्षा 5 देखि 8 सम्म अध्ययनरत विद्यार्थीको सङ्ख्या तलको तालिकामा दिइएको छ । यसलाई वृत्तचित्रमा प्रस्तुत गर्नुहोस् :

कक्षा	5	6	7	8	जम्मा
विद्यार्थी सङ्ख्या	45	55	40	60	200

समाधान

यहाँ जम्मा विद्यार्थी सङ्ख्या = 200

200 जना विद्यार्थी = 360°

1 जना विद्यार्थी = $\left(\frac{360}{200}\right)^\circ = \left(\frac{9}{5}\right)^\circ$

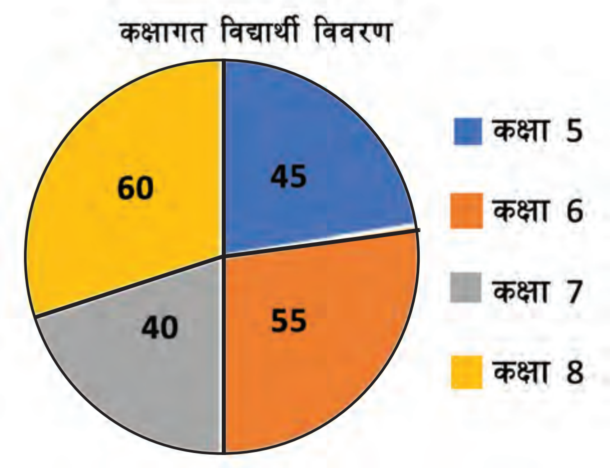
अब कक्षा 5 को 45 जना विद्यार्थी = $\left(\frac{9}{5}\right)^\circ \times 45 = 81^\circ$

कक्षा 6 को 55 जना विद्यार्थी = $\left(\frac{9}{5}\right)^\circ \times 55 = 99^\circ$

कक्षा 7 को 40 जना विद्यार्थी = $\left(\frac{9}{5}\right)^\circ \times 40 = 72^\circ$

कक्षा 8 को 60 जना विद्यार्थी = $\left(\frac{9}{5}\right)^\circ \times 60 = 108^\circ$

माथिको तथ्याङ्कलाई वृत्तचित्रमा प्रस्तुत गर्दा,



उदाहरण 4

दीपेन्द्रले आफ्नो मासिक खर्च र बचत विवरणलाई शीर्षकगत छुट्याएको विवरण तलको तालिकामा दिइएको छ । यसलाई वृत्तचित्रमा प्रस्तुत गर्नुहोस् :

शीर्षक	खानामा	स्वास्थमा	स्वास्थ्यमा	बचत	जम्मा
रकम (प्रतिशतमा)	20	15	35	30	200

समाधान

यहाँ जम्मा आम्दानी = 100%

100% आम्दानीलाई = 360^o मा देखाउन सकिन्छ ।

1% आम्दानीलाई = $\left(\frac{360}{100}\right)^\circ = \left(\frac{18}{5}\right)^\circ$

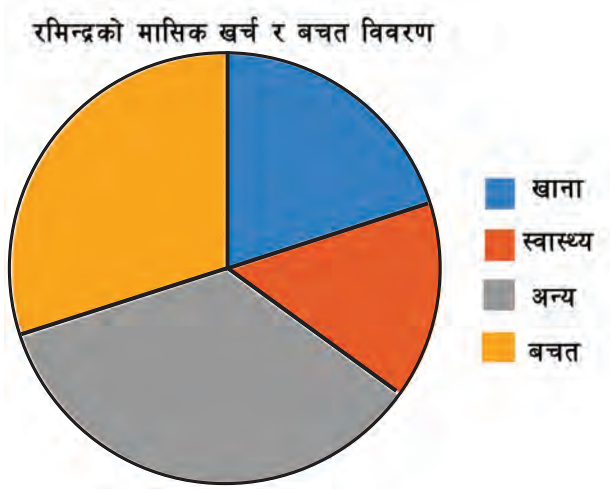
अब खानामा = 20% = $\left(\frac{18}{5}\right)^\circ \times 20 = 72^o$

स्वास्थ्यमा = 15% = $\left(\frac{18}{5}\right)^\circ \times 15 = 54^o$

अन्यमा = 35% = $\left(\frac{18}{5}\right)^\circ \times 35 = 126^o$

बचत = 30% = $\left(\frac{18}{5}\right)^\circ \times 30 = 108^o$

माथिको तथ्याङ्कलाई वृत्तचित्रमा प्रस्तुत गर्दा,



उदाहरण 5

युवा माध्यमिक विद्यालयका विद्यार्थीलाई शैक्षिक भ्रमणका लागि पोखरा, लुम्बिनी, इलाम र काठमाडौँमध्ये कहाँ जाने भनी सोधिएको प्रश्नबाट प्राप्त नतिजालाई तल तालिकामा दिइएको छ । उक्त नतिजालाई वृत्तचित्रमा प्रस्तुत गर्नुहोस् :

शैक्षिक भ्रमणका लागि ठाउँ	पोखरा	लुम्बिनी	इलाम	काठमाडौँ	जम्मा
विद्यार्थी सङ्ख्या	75	55	81	42	253

समाधान

यहाँ जम्मा विद्यार्थी सङ्ख्या = 253

253 जना विद्यार्थी = 360°

1 जना विद्यार्थी = $\left(\frac{360}{253}\right)^\circ$

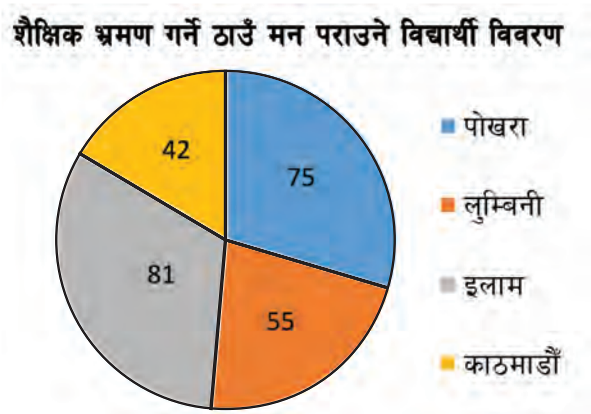
अब पोखरा मन पराउने 75 जना विद्यार्थी = $\left(\frac{360}{253}\right)^\circ \times 75 = 106.7^\circ = 107^\circ$ (शून्यान्त गर्दा)

लुम्बिनी मन पराउने 55 जना विद्यार्थी = $\left(\frac{360}{253}\right)^\circ \times 55 = 78.3^\circ = 78^\circ$ (शून्यान्त गर्दा)

इलाम मन पराउने 81 जना विद्यार्थी = $\left(\frac{360}{253}\right)^{\circ} \times 81 = 115.3^{\circ} = 115^{\circ}$ (शून्यान्त गर्दा)

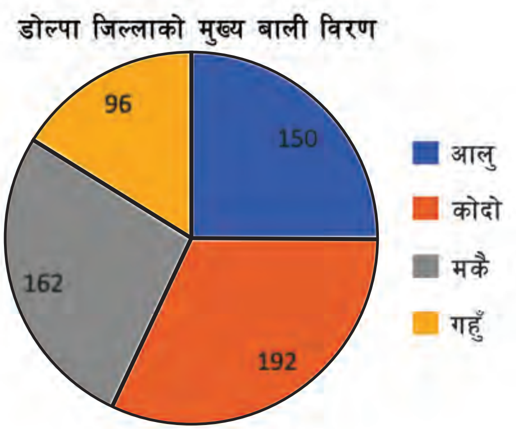
काठमाडौँ मन पराउने 42 जना विद्यार्थी = $\left(\frac{360}{253}\right)^{\circ} \times 42 = 59.8^{\circ} = 60^{\circ}$ (शून्यान्त गर्दा)

माथिको तथ्याङ्कलाई वृत्तचित्रमा प्रस्तुत गर्दा,



अभ्यास 21.1

1. दिइएको चित्रमा डोल्पा जिल्लाका परिवारको मुख्य बालीको तथ्याङ्क दिइएको छ । उक्त वृत्तचित्रका आधारमा निम्नलिखित प्रश्नको उत्तर दिनुहोस् :

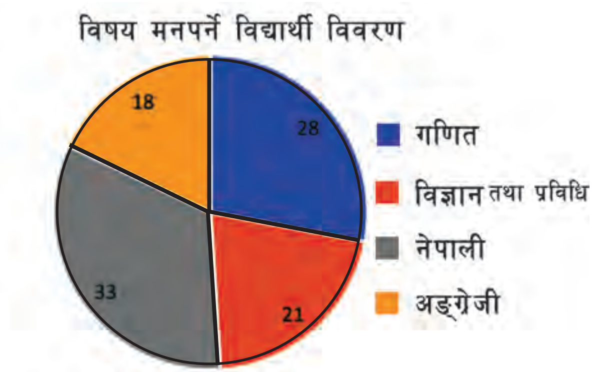


(क) आलु र कोदो मुख्य बाली हुने कति कति घरपरिवार रहेछन् ?

(ख) मकै र गहुँ मुख्य बाली हुने कति कति घरपरिवार रहेछन् ?

(ग) माथि दिइएको तथ्याङ्कमा जम्मा कति परिवार रहेछन्, पत्ता लगाउनुहोस् ।

2. **दिइएको चित्रमा जानकी माध्यमिक विद्यालयका कक्षा** 8 **का** 300 **विद्यार्थीको मन पर्ने विषयका आधारमा तयार गरिएको वृत्तचित्र दिइएको छ । उक्त वृत्तचित्र अवलोकन गरी निम्नलिखित प्रश्नको उत्तर दिनुहोस् :**



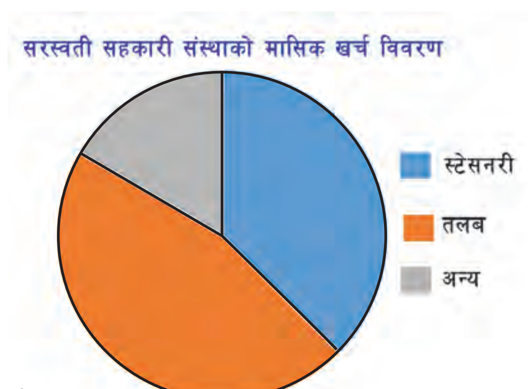
(क) गणित विषय मन पर्ने विद्यार्थी सङ्ख्या कति होला ?

(ख) अङ्ग्रेजी विषय मन पर्ने विद्यार्थी सङ्ख्या पत्ता लगाउनुहोस् ।

(ग) गणित र विज्ञान तथा प्रविधि विषय मन पराउने जम्मा विद्यार्थी सङ्ख्या पत्ता लगाउनुहोस् ।

(घ) गणित, विज्ञान तथा प्रविधि र नेपालीबाहेकका विषय मन पराउने विद्यार्थी सङ्ख्या पत्ता लगाउनुहोस् ।

3. **सँगैको चित्रमा सरस्वती सहकारी संस्थाको मासिक खर्च विवरणलाई वृत्तचित्रमा प्रस्तुत गरिएको छ । यदि सो सहकारीको मङ्सिर महिनामा रु. 54,000 खर्च लाग्यो भने तलका प्रश्नको उत्तर दिनुहोस् :**



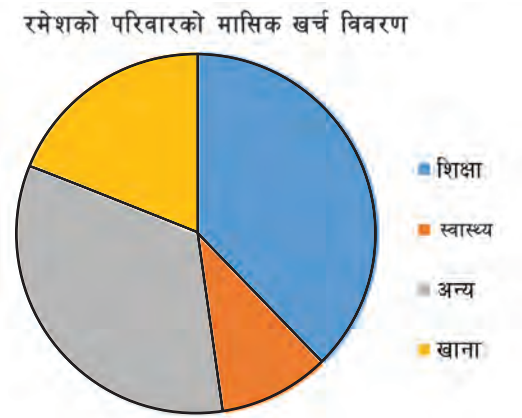
(क) तलबमा कति खर्च लाग्यो ?

(ख) स्टेसनरीमा कति खर्च लाग्यो ?

(ग) अन्यमा कति खर्च भएछ, पत्ता लगाउनुहोस् ।

(घ) स्टेसनरीमा भन्दा तलबमा कति बढी खर्च भएछ, पत्ता लगाउनुहोस् ।

4. **सँगैको चित्रमा रमेशको परिवारको मासिक खर्च विवरणलाई वृत्तचित्रमा प्रस्तुत गरिएको छ । यदि रमेशको परिवारमा खानामा मासिक रु. 8500 खर्च लाग्छ भने तलका प्रश्नको उत्तर दिनुहोस् :**



(क) शिक्षामा कति खर्च लाग्ने रहेछ ?

(ख) स्वास्थ्यमा कति खर्च लाग्ने रहेछ ?

(ग) अन्य शीर्षकमा कति खर्च लाग्ने रहेछ ?

(घ) रमेशको परिवारको मासिक जम्मा खर्च पत्ता लगाउनुहोस् ।

5. **कक्षा 8 का विद्यार्थीले मन पराउने अतिरिक्त क्रियाकलाप र विद्यार्थी सङ्ख्या तलको तालिकामा दिइएको छ । उक्त तालिकालाई वृत्तचित्रमा प्रस्तुत गर्नुहोस् :**

नाटक	कमेडी	नृत्य	खेल
7	8	9	10

6. **सरस्वती माध्यमिक विद्यालयका कक्षा 8 का विद्यार्थीको गणित विषयको प्राप्ताङ्क तालिकामा दिइएको छ । उक्त तालिकालाई वृत्तचित्रमा प्रस्तुत गर्नुहोस् :**

विशिष्ट श्रेणी	प्रथम श्रेणी	द्वितीय श्रेणी	तृतीय श्रेणी
40	56	32	16

7. तालिकामा पेम्बाको मासिक खर्चको शीर्षकगत विवरण दिइएको छ । यसलाई वृत्तचित्रमा प्रस्तुत गर्नुहोस् :

शीर्षक	खाना	स्वास्थ्य	शिक्षा तथा यातायात	सञ्चार तथा घरभाडा
प्रतिशत	30%	15%	32%	23%

8. दिइएको तालिकामा एउटा परिवारको आम्दानी दिइएको छ । यसलाई वृत्तचित्रमा प्रस्तुत गर्नुहोस् :

शीर्षक	तलब	कृषि	व्यापार	घरभाडा
प्रतिशत	30%	10%	45%	15%

परियोजना कार्य (Project Work)

तपाईंको कक्षामा भएका साथीहरूलाई भलिबल, फुटबल, क्रिकेट वा अन्य कुनै खेलमध्ये कुनमा बढी रुचि राख्नुहुन्छ भनी सोध्नुहोस् र प्राप्त विवरणलाई तालिकीकरण गर्नुहोस् । तपाईंले बनाउनु भएको तालिकाको आधारमा चार्टपेपरमा वृत्तचित्र बनाई कक्षामा प्रस्तुत गर्नुहोस् ।

उत्तर

1. (क) 150, 192 (ख) 162, 96 (ग) 600

2 देखि 8 सम्मको उत्तर शिक्षकलाई देखाउनुहोस् ।

21.2 वैयक्तिक श्रेणीको मध्यक, मध्यिका र रित (Mean, Median and Mode of Individual Series)

(क) मध्यक (Mean)

क्रियाकलाप 3

कक्षा 8 मा अध्ययन गर्ने 12 जना विद्यार्थी खाजा खान खाजाघर गएछन् । उनीहरूले आफ्नो रुचिअनुसारको खाजा खाइसकेपछि उनीहरूले खाजाको पैसा तिर्दा कति भयो भनी पसलेलाई सोधेछन् । पसलेले प्रत्येकको खाजाबापतको रकम अलग अलग टिपेर दिए । पसलेले दिएअनुसार ती 12 जना विद्यार्थीले निम्नानुसारको रकम बराबर हुने गरी खाजा खाएका रहेछन् :

65, 55, 45, 75, 78, 56, 90, 85, 57, 52, 80, 78

माथिको तथ्याङ्कका आधारमा सोधिएका प्रश्नहरूलाई समूहमा छलफल गरी निष्कर्ष निकाल्नुहोस् :

(क) सबैभन्दा धेरै खानेले कति रुपियाँको खाजा खाएका रहेछन् ? उनले खाजामा के के खाएका होलान् ?

(ख) सबैभन्दा कम खानेले कति रुपियाँको खाजा खाएका रहेछन् ? उनले खाजामा के के खाएका होलान् ?

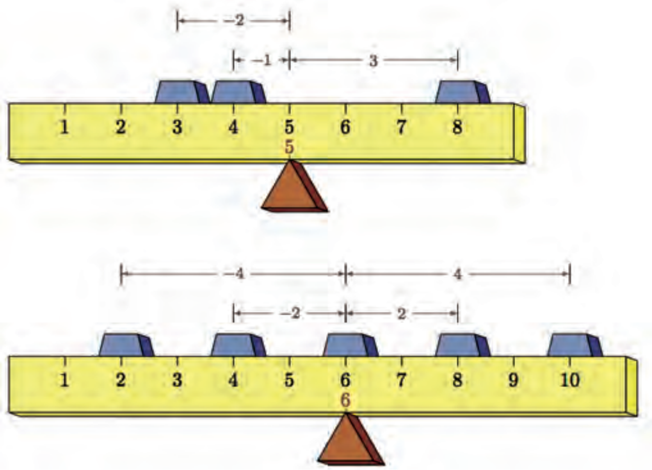
(ग) सबैले खाजाबापत जम्मा कति रुपियाँको खाजा खाएका रहेछन् ?

(घ) उनीहरूले सबैले बराबर पैसा तिर्ने सल्लाह गरेछन् भने एक जनाको भागमा कति रुपियाँ तिर्नु पर्ने भयो ?

(ङ) बराबर तिर्दा एक जनाले तिर्नु पर्ने रकमले के को प्रतिनिधित्व गर्दछ ?

कुनै पनि तथ्याङ्कको योगफललाई त्यसको सङ्ख्याले भाग गर्दा आउने भागफललाई सो तथ्याङ्कको औसत (Mean) भनिन्छ । यसलाई अङ्क गणितीय मध्यक (Arithmetic Mean) वा मध्यक मात्र पनि भनिन्छ । यसलाई सङ्केतका रूपमा $\overline{X}$ लेखिन्छ । यदि दिइएको तथ्याङ्कलाई X ले जनाउँदा तथ्याङ्कको योगफललाई ΣX लेखिन्छ र n ओटा तथ्याङ्कहरू भए मध्यक $(\overline{X}) = \frac{\Sigma X}{n}$ हुन्छ ।

मध्यकलाई तलको चित्रबाट पनि थप स्पष्ट पार्न सकिन्छ :



पहिलो तथ्याङ्क 3, 4 र 8 दिइएको छ । 3, 4 र 8 को मध्यक 5 हो । पहिलो चित्रमा 5 को तल राखिएको फलक्रमले सन्तुलन मिलाएको छ ।

दोस्रो तथ्याङ्क 2, 4, 6, 8 र 10 दिइएको छ । 2, 4, 6, 8 र 10 को मध्यक 6 हो । दोस्रो चित्रमा 6 को तल राखिएको फलक्रमले सन्तुलन मिलाएको छ ।

उदाहरण 1

गणित विषयको पहिलो त्रैमासिक परीक्षामा विद्यार्थीले पाएको प्राप्ताङ्क दिइएको छ । उक्त तथ्याङ्कबाट विद्यार्थीको औसत प्राप्ताङ्क पत्ता लगाउनुहोस् :

4,12,13,21,12,12,10

समाधान

यहाँ प्राप्ताङ्कहरूको योगफल $(\Sigma X) = 4+12+13+21+12+12+10 = 84$,

जम्मा विद्यार्थी सङ्ख्या $(n) = 7$

औसत प्राप्ताङ्क = मध्यक $(\overline{X}) = ?$

हामीलाई थाहा छ,

औसत प्राप्ताङ्क (मध्यक)$(\overline{X}) = \frac{\Sigma X}{n} = \frac{84}{7} = 12$

$\therefore$ औसत प्राप्ताङ्क = 12

उदाहरण 2

विद्यालयले आयोजना गरेको सदनस्तरीय भलिबल प्रतियोगितामा 5 सदनले प्राप्त गरेको स्कोर क्रमशः 12, 15, 18, a र 14 छ । यदि तिनीहरूको औसत स्कोर 15 भए a को मान निकाल्नुहोस् ।

समाधान

यहाँ स्कोरहरूको योगफल $(\Sigma X) = 12 + 15 + 18 + a + 14 = 59 + a$,

$n = 5$ र औसत स्कोर $(\overline{X}) = 15$ छ ।

हामीलाई थाहा छ,

मध्यक $(\overline{X}) = \dfrac{\Sigma x}{n}$

or, $15 = \dfrac{59+a}{5}$

or, $75 = 59 + a$

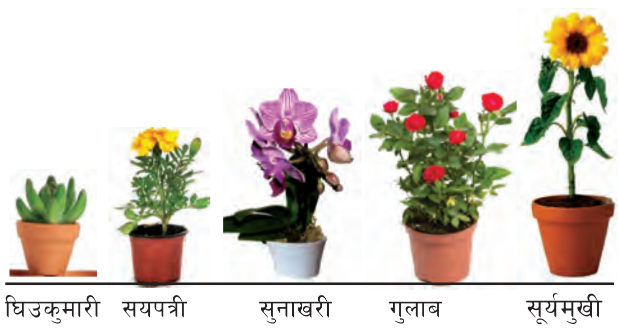
$\therefore a = 16$ हुन्छ ।

(क) मध्यिका (Median)

क्रियाकलाप 4

तलका दुई अवस्थाका बारेमा समूहमा छलफल गर्नुहोस् :

(अ) दिइएको चित्रमा विद्यालयको बगैँचामा कुनै छ गमलामा रोपिएका बिरुवालाई तिनीहरूको उचाइका आधारमा क्रमशः होचोबाट अग्लोको क्रममा राखिएको छ । अब ती गमलाहरूलाई पुनः अग्लोबाट होचोको क्रममा राख्नुहोस् :



होचोदेखि अग्लोको क्रममा मिलाएर राख्दा

अग्लोदेखि होचोको क्रममा मिलाएर राख्दा

(क) दुवै तरिकाबाट राख्दा बिचमा कुन बिरुवा परेको छ ?

(ख) बिचमा परेको बिरुवाको अगाडि र पछाडि कति कतिओटा बिरुवा परेका छन् ?

(ग) यस्तो बिचमा परेको मानलाई के भनिन्छ ?

(घ) यदि ती बिरुवाहरूको उचाइ क्रमशः गमलासहित सूर्यमुखी फूल 115 cm, गुलाफ 95 cm, सुनाखरी 85 cm, सयपत्री फूल 75 cm र घिउकुमारी 50 cm भए कति उचाइले ती बिरुवाको उचाइलाई दुई बराबर भागमा विभाजन गर्दछ ?

(आ) यदि धुपीलाई चित्रमा जस्तै गरी उचाइका आधारमा अग्लोदेखि होचो क्रममा मिलाएर राखियो भने

(क) अब बिचमा कुन बिरुवा परेको छ ?

(ख) यस्तो अवस्थामा बिचमा परेको बिरुवाको उचाइ कसरी पत्ता लगाउने होला ?

(ग) यदि धुपीको उचाइ (गमलासहित) 125 cm भए कति उचाइले ती बिरुवाहरूको उचाइलाई दुई बराबर भागमा विभाजन गर्दछ ?

घिउकुमारी, सयपत्री, सुनाखरी, गुलाब र सूर्यमुखीलाई होचोदेखि अग्लो र अग्लोदेखि होचोको क्रममा मिलाएर राख्दा सुनाखरी बिचमा पर्छ। सुनाखरीदेखि अगाडि र पछाडि दुई दुईओटा बिरुवा परेका छन्। सुनाखरी बिचमा भएकाले सुनाखरीको उचाइलाई नै मध्यिका उचाइ भनिन्छ।

फेरि धुपीको उचाइअनुसार अग्लोदेखि होचोको क्रममा राख्दा बिचमा कुन बिरुवा परेको छ भन्न कठिन भयो । यदि गुलाफलाई बिच मान्ने हो भने अगाडि दुईओटा र पछाडि तीनओटा बिरुवा हुन्छन् । यदि सुनाखरीलाई बिच मान्ने हो भने अगाडि तीनओटा र पछाडि दुईओटा बिरुवा पर्छन् । यस्तो अवस्थामा गुलाफ र सुनाखरीको बिचको स्थानबाट अगाडि धुपी, सूर्यमुखी र गुलाफ तथा पछाडि सुनाखरी, सयपत्री र घिउकुमारी पर्दछन् । यही स्थानलाई मध्यिका पर्ने स्थान मानिन्छ । यही बिचको मान $\frac{95+85}{2} = 90$ नै मध्यिका उचाइ हो ।

अवस्था (अ)	अवस्था (आ)
जम्मा बिरुवाको सङ्ख्या (n) = 5	जम्मा बिरुवाको सङ्ख्या = 6
बिच पर्ने स्थान = तेस्रो स्थान (बढ्दो वा क्रममा राखेपछि)	बिच पर्ने स्थान = तेस्रो र चौथो स्थानको बिच (बढ्दो वा क्रममा राखेपछि)
जम्मा बिरुवाको सङ्ख्या र मध्यिका पर्ने स्थानको सम्बन्ध हेर्दा,	जम्मा बिरुवाको सङ्ख्या र मध्यिका पर्ने स्थानको सम्बन्ध हेर्दा,
मध्यिका पर्ने स्थान = तेस्रो स्थान = $\frac{(5+1)}{2}$ औँ पद = $\frac{n+1}{2}$ औँ पद	मध्यिका पर्ने स्थान = $\frac{n}{2}$ औँ स्थान र $(\frac{n}{2}+1)$ औँ स्थानको बिचको मान
मध्यिका = $\frac{n+1}{2}$ औँ पदको मा	मध्यिका = $\frac{n}{2}$ औ पद र $(\frac{n}{2}+1)$ औँ पदको मानको अङ्क गणितीय मध्यक हुन्छ ।

कुनै पनि तथ्याङ्कलाई बराबर दुई भागमा विभाजन गर्ने मानलाई मध्यिका (Median) भनिन्छ । यसलाई सङ्केतका रूपमा M_d लेखिन्छ ।

दिइएको तथ्याङ्कमा n ओटा मान भए,

(क) यदि n बिजोर भए मध्यिका $(M_d) = \frac{n+1}{2}$ औँ पदको मान हुन्छ ।

(ख) यदि n जोर भए मध्यिका $(M_d) = \dfrac{\frac{n}{2} \text{ औँ पदको मान} + (\frac{n}{2}+1) \text{ औँ पदको मान}}{2}$ हुन्छ ।

मध्यिकलाई तलको चित्रबाट पनि थप स्पष्ट पार्न सकिन्छ :

उदाहरण 3

कक्षा 4 का विद्यार्थीसँग कतिओटा सिसाकलम छन् भनी सङ्कलन गरिएको तथ्याङ्कबाट मध्यिका पत्ता लगाउनुहोस् :

4, 12, 13, 11, 8, 15, 10

समाधान

यहाँ दिइएका तथ्याङ्कलाई बढ्दो क्रममा राख्दा,

4, 8, 10, 11, 12, 13, 15

जम्मा विद्यार्थी सङख्या (n) = 7

मध्यिका (M_d) = ?

हामीलाई थाहा छ,

n बिजोर भएकाले, मध्यिका (M_d) = $\frac{n+1}{2}$ औँ पदको मान = $\frac{7+1}{2}$ औँ पदको मान = 4 औँ पदको मान

∴ मध्यिका = 13 हुन्छ ।

उदाहरण 4

यदि 8 जना विद्यार्थीको तौल 45kg, 42kg, 44kg, 50kg, 45kg, 48kg, 40kg र 43kg छ भने मध्यिका निकाल्नुहोस् :

समाधान

यहाँ दिइएको तथ्याङ्कलाई बढ्दो क्रममा राख्दा,

40kg, 42kg, 43kg, 44kg, 45kg, 45kg, 48kg, 50kg

जम्मा विद्यार्थी सङख्या (n) = 8

मध्यिका (M_d) = ?

हामीलाई थाहा छ ।

n जोर भएकाले, मध्यिका (M_d)= $\dfrac{\frac{n}{2}\text{ औँ पदको मान} + (\frac{n}{2}+1)\text{ औँ पदको मान}}{2}$

$= \dfrac{\frac{8}{2}\text{ औँ पदको मान} + (\frac{8}{2}+1)\text{ औँ पदको मान}}{2}$

$$= \frac{4 \text{ औँ पदको मान} + 5 \text{औँ पदको मान}}{2}$$

$$= \frac{44 + 45}{2} = 44.5$$

∴ मध्यिका = 44.5 kg हुन्छ ।

अर्को तरिका,

मध्यिका $(M_d) = \frac{n+1}{2}$ औँ पदको मान $= \frac{8+1}{2}$ औँ पदको मान = 4.5 औँ पदको मान

∴ मध्यिका $= \frac{4 \text{ औँ पदको मान} + 5 \text{ औँ पदको मान}}{2} = \frac{44 + 45}{2} = 44.5$

(ग) रित (Mode)

क्रियाकलाप 5

सगरमाथा माध्यमिक विद्यालयका कक्षा 8 मा उपस्थित भएका विद्यार्थीले लगाएको जुत्ताको नम्बर कति कति रहेछ भनी सोध्दा निम्नानुसारको तथ्याङ्क प्राप्त भयो :
5, 6, 6.5, 7, 5.5, 5, 6, 6, 5.5, 5, 6, 6, 7, 6, 5, 6.5, 7
माथिको तथ्याङ्कका आधारमा सोधिएका प्रश्नको उत्तर दिनुहोस् :

(क) सबैभन्दा धेरैले लगाउने कुन नम्बरको जुत्ता रहेछ ?

(ख) सबैभन्दा धेरै पटक दोहोरिएको मानलाई के भनिन्छ ?

कुनै पनि तथ्याङ्कमा सबैभन्दा बढी पटक दोहोरिएको मानलाई रित (Mode) भनिन्छ । माथिको तथ्याङ्कमा सबैभन्दा धेरै दोहोरिएको जुत्ता नम्बर 6 हो । 6 नै दिइएको तथ्याङ्कको रित मान हो ।

उदाहरण 9

यदि कक्षा 8 का 10 जना विद्यार्थीको उचाइ 145cm, 149cm, 140cm, 148cm, 142cm, 149cm, 142cm, 155cm, 150cm र 149cm छ भने रित निकाल्नुहोस् ।:

समाधान

यहाँ दिइएका तथ्याङ्कहरूलाई बढ्दो क्रममा राख्दा,

140cm, 142cm, 142cm, 145cm, 148cm, 149cm, 149cm, 149cm, 150cm र 155cm

यहाँ, 149cm उचाइ हुने विद्यार्थीको सङ्ख्या 3 छ। यो नै धेरै विद्यार्थीको उचाइ भएकाले ∴ रित (Mode) = 149cm हुन्छ ।

अभ्यास 21.2

1. **दिइएको तथ्याङ्कबाट अङ्क गणितीय मध्यक (Arithmetic Mean) निकाल्नुहोस् ।**
   (क) 15, 13, 18, 16, 14, 17, 12
   (ख) 84, 91, 88, 94, 91, 105, 98, 85
   (ग) 45, 35, 37, 32, 47, 38, 39, 36, 34, 37
   (घ) 105, 108, 112, 106, 120, 108, 112, 110, 100
   (ङ) 5ft, 4.8ft, 5.1ft, 4.8ft, 5ft, 4.9ft, 4.7ft, 4.9ft
2. **तलका तथ्याङ्कहरूबाट** m **को मान निकाल्नुहोस् :**
   (क) $\Sigma X = 77 + m$, $n = 10$ र मध्यक $(\overline{X}) = 8$
   (ख) $\Sigma X = 117$, $n = 8 + m$ र मध्यक $(\overline{X}) = 13$
   (ग) $\Sigma X = 40 + m$, $n = 4 +$ र मध्यक $(\overline{X}) = 5$
   (घ) $\Sigma X = 264 + 24a$, $n = 11 + a$ र मध्यक $(\overline{X}) = m$
   (ङ) 3, 6, m, 9 र 10 को मध्यक 7 छ ।
   (च) 42, 48, 36, 39, m , 45, 42 र 32 को मध्यक 40 छ ।
3. **तलका तथ्याङ्कहरूबाट मध्यिका** (Median) **निकाल्नुहोस् :**
   (क) 27, 29, 18, 25, 32, 21, 26
   (ख) 250, 282, 211, 190, 235, 284, 237, 217, 245, 257, 281
   (ग) 34, 46, 49, 38, 56, 86, 68, 35
   (घ) 5.9ft, 5.2ft, 6.1ft, 7.2ft, 6.5ft, 5.4ft
   (ङ) 112kg, 104kg, 108kg, 109kg, 111kg, 109kg, 114kg, 112kg, 110kg, 113kg
4. **(क) यदि** $x, x+2, x+5, x+7$ **र** $x+8$ **बढ्दो क्रममा छन् र सोको मध्यिका 15 भए** x **को मान निकाल्नुहोस् ।**
   (ख) यदि 5, 17, $x+5$, $x+7$, $x+12$, **50 र 58 बढ्दो क्रममा छन् र सोको मध्यिका 28 भए** x **को मान निकाल्नुहोस् ।**

5. **दिइएको तथ्याङ्कबाट रित (Mode) निकाल्नुहोस् :**

(क) 2, 3, 3, 2, 4, 5, 6, 3, 3, 5, 5, 4, 3, 2

(ख) 3, 7, 9, 8, 8, 9, 8, 6, 5, 8

(ग) 29cm, 34cm, 29cm, 26cm, 55cm, 34cm, 35cm, 40cm, 34cm, 56cm

(घ) 120, 125, 130, 125, 120, 135, 120, 140

(ङ) 99kg, 135kg, 182kg, 49kg, 189kg, 196kg, 78kg, 192kg, 182kg, 113kg

परियोजना कार्य (Project Work)

(क) तपाईंको घरमा भएका कुनै 8 ओटा सामग्रीको उचाइ नाप्नुहोस् र त्यसको विवरण तालिकामा भर्नुहोस् । त्यसपछि तालिकाका आधारमा मध्यक र मध्यिका पत्ता लगाई कक्षाकोठामा प्रस्तुत गर्नुहोस् ।

(ख) तपाईंले अध्ययन गर्ने पाठ्यपुस्तक कति कति पेजका छन् ? उक्त तथ्याङ्कका आधारमा एउटा पाठ्यपुस्तक कति पेजको बन्ने रहेछ, पत्ता लगाई कक्षाकोठामा प्रस्तुत गर्नुहोस् ।

(ग) मध्यक र रितको प्रयोग हुने अवस्थाको खोजी गरी प्रतिवेदन लेख्नुहोस् ।

उत्तर

1.	(क) 15	(ख) 92	(ग) 38	(घ) 109	(ङ) 4.9 ft
2.	(क) 3	(ख) 1	(ग) 5	(घ) 24	(ङ) 7
	(च) 36				
3.	(क) 26	(ख) 245	(ग) 47.5	(घ) 6 ft	(ङ) 110.5 kg
4.	(क) 10	(ख) 21			
5.	(क) 3	(ख) 8	(ग) 34cm	(घ) 120	(ङ) 182 kg

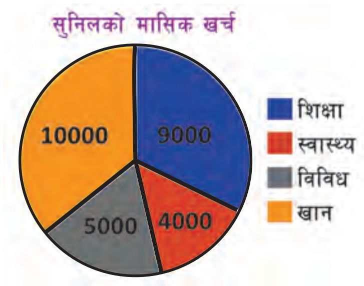
मिश्रित अभ्यास

1. **सुनिलले खाना, शिक्षा, स्वास्थ्य र विविध शीर्षकमा गरेको मासिक खर्च विवरण सँगैको वृत्त चित्रमा देखाइएको छ,**

(क) सुनिलले गरेको खर्च शीर्षकमध्ये सबैभन्दा बढी खर्च कुन शीर्षकमा गरेको देखिन्छ ?

(ख) उसले शीर्षकगत गरेको खर्चको औसत कति हुन्छ, पत्ता लगाउनुहोस् ।

(ग) सुनिलले मासिक रु. 7000 बचत गर्छन् भने वार्षिक आम्दानी कति रहेछ ?



2. **तलको तालिका अध्ययन गरी दिइएका समस्या समाधान गर्नुहोस् :**

कक्षा	V	VI	VII	VIII	जम्मा
विद्यार्थी सङ्ख्या	53	43	46	50	192

(क) माथिको तालिकालाई वृत्तचित्रमा प्रस्तुत गर्नुहोस् ।

(ख) प्रत्येक कक्षामा औसत कति विद्यार्थी रहेछन् ?

(ग) प्रत्येक कक्षामा कति कति प्रतिशत विद्यार्थी रहेछन् पत्ता लगाउनुहोस् ।

3. **80 जना छात्रालाई उनीहरूको मनपर्ने खेल के हो भनी सोधिएको प्रश्नको उत्तरका आधारमा तयार गरिएको तालिका तल दिइएको छ :**

खेल विवरण	छात्रा
ब्याडमिन्टन	40
टेबुल टेनिस	10
भलिबल	20
क्रिकेट	10
जम्मा	80

(क) कुन दुई खेललाई छात्राको बराबर सङ्ख्याले मन पराएका रहेछन् ?

(ख) माथिको तथ्याङ्कलाई वृत्त चित्रमा प्रस्तुत गर्नुहोस् ।

4. **तल रेनिशको मासिक खर्चको विवरण दिइएको छ :**

खर्च विवरण	खर्च रकम (रु.मा)
यातायात	1000
शिक्षा	4000
स्वास्थ्य	2000
लत्ताकपडा	3000
जम्मा	10000

(क) माथिको तथ्याङ्कलाई वृत्त चित्रमा प्रस्तुत गर्नुहोस् ।

(ख) रेनिशको शीर्षगत औसत खर्च रु 2500 रहेछ । यदि शीर्षकगत औसत खर्च रु 2000 बनाउने हो भने शिक्षा र स्वास्थ्य दुवैमा समान कति रकम घटाउनुपर्ला, गणना गर्नुहोस् ।

5. **कक्षा** 8 **का** 10 **जना विद्यार्थीको तौल** (Kg. **मा) तल दिएको छ :**

32, 35, 38, 42, 42, 47, 34, 36, 44, 40

(क) माथिको तथ्याङ्कको रित कति हुन्छ, लेख्नुहोस् ।

(ख) माथिको तथ्याङ्कबाट विद्यार्थीको औसत तौल (Kg. मा) पत्ता लगाउनुहोस् ।

(ग) के मध्यिका मान र औसत मान बराबर छन्, तुलना गर्नुहोस् ।

6. **कक्षा** 8 **का** 12 **जना विद्यार्थीले प्रथम त्रैमासिक परीक्षामा गणित विषयमा प्राप्त गरेको अङ्क दिइएको छ :**

23, 30, 25, 26, 24, 28, 29, 28, 31, 33, 34, 28

(क) कक्षा 8 का विद्यार्थीको प्राप्ताङ्कको मध्यक पत्ता लगाउनुहोस् ।

(ख) विद्यार्थीको प्राप्ताङ्कको मध्यिका पत्ता लगाउनुहोस् ।

(ग) माथिको तथ्याङ्कबाट रित पत्ता लगाउनुहोस् ।

7. **स्वास्थ चौकीमा बिहान** 10 **बजेसम्म उपचार गर्न आएका बालबालिकाको तौल** (Kg. **मा) दिइएको छ,**

22, 20, 15, 21, 18, 19, 18

(क) बालबालिकाको औसत तौल कति रहेछ, पत्ता लगाउनुहोस् ।

(ख) बालबालिकाको मध्यिका तौल कति रहेछ, पत्ता लगाउनुहोस् ।

(ग) उक्त स्वास्थ्य चौकीमा अरू 2 जना बालबालिका सोही दिन उपचार गर्न आएछन् । प्रश्न (ख) कै मध्यिका तौल हुन उनीहरूको तौल कति कति हुनुपर्छ ?

(घ) उक्त स्वास्थ्य चौकीमा अरू 2 जना बालबालिका सोही दिन उपचार गर्न आएछन् । प्रश्न (क) कै मध्यिक तौल हुन उनीहरूको तौल कति कति हुनुपर्छ ?

8. दिइएको तथ्याङ्कबाट, मध्यक, मध्यिका र रित पत्ता लगाउनुहोस् :

(क) 15, 20, 18, 16, 18, 16, 18

(ख) 75, 80, 68, 95, 68, 46, 38, 45

उत्तर

1. (क) खानामा (ख) रु. 7000 (ग) रु. 4,20,000
2. (क) शिक्षकलाई देखाउनुहोस् (ख) 48 (ग) 27.6%, 22.4%, 24%, 26%
3. शिक्षकलाई देखाउनुहोस् ।
4. (क) शिक्षकलाई देखाउनुहोस् (ख) रु.1000
5. (क) 42 (ख) 39 (ग) हुन्छ
6. (क) 28.25 (ख) 28 (ग) 28
7. शिक्षकलाई देखाउनुहोस् ।

6\. (क) मध्यक = 17.3, मध्यिका = 18 रीत = 18

(ख) मध्यक = 64.4, मध्यिका = 68 रीत = 68